FIAT REPORT NO. 1099

THE DETERMINATION OF THE DIELECTRIC AND MAGNETIC PROPERTIES OF INHOMOGENEOUS DIELECTRICS, ESPECIALLY BODY TISSUES, IN THE DECIMETER WAVE RANGE.



OFFICE OF MILITARY GOVERNMENT FOR GERMANY (US)

FIELD INFORMATION AGENCY, TECHNICAL (US)

OFFICE OF MILITARY GOVERNMENT FOR GERMANY (US)

FIAT REPORT NO. 1099 PRINTER'S DATE

THE DETERMINATION OF THE DIELECTRIC AND MAGNETIC PROPERTIES OF INHOMOGENEOUS DIELECTRICS, ESPECIALLY BODY TISSUES, IN THE DECIMETER WAVE RANGE

BY

HERMANN SCHWAN

Kaiser-Wilhelm-Institut für Biophysik, Frankfurt/Main

THIS MANUSCRIPT WAS RECEIVED AND REGISTERED ON 13. DECEMBER 1946
BY SCIENTIFIC BRANCH
FIELD INFORMATION AGENCY, TECHNICAL (US)



ABSTRACT.

The known comparative methods for the determination of complex resistances by means of the Lecher-arrangement do not permit measurement at wavelengths below 3 m. The progress in ultra-shortwave therapy requires urgently an accurate knowledge of the electrical constants of body tissues and methods of measuring them in the decimeter wave range. The reported resonance method is an absolute method which permits measurement even at short wavelengths, is simple in application, and allows high accuracy. In the second chapter it is shown that, in the decimeter wave range, only the non-quasistationary resonance methods are of practical value. In the subsequent chapters, the considerations are discussed which apply to measurement in the 40 to 300 cm range when using resonance arrangements. The disturbing effects of wire supports and elimination of these effects are discussed. In the fifth chapter formulas are given which permit the easy computation of the dielectric and magnetic properties of materials from their complex initial resistances. The still simpler methods of calculation which become valid when special properties of the materials are taken into consideration are likewise given.

BIOGRAPHICAL NOTE.

Dr. Hermann Schwan studied at Goettingen, Breslau and Frankfurt /Main. In 1940 he obtained his degree in biophysics under Prof. Rajewsky and stayed with him as scientific assistant at the „Kaiser-Wilhelm-Institut für Biophysik" in Frankfurt a. M. In 1946 he became lecturer in physics and biophysics under Prof. Rajewsky at the university of Frankfurt. His special fields are high-frequency physics and biological action of high-frequency electrical fields.

Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Biophysik, Frankfurt am Main.
Direktor: Professor Dr. B. Rajewsky.

DIE BESTIMMUNG DER DIELEKTRISCHEN UND MAGNETISCHEN EIGENSCHAFTEN INHOMOGENER DIELEKTRIKEN, INSBESONDERE BIOLOGISCHER KÖRPER IM DEZIMETERWELLENBEREICH.

Von

Dr. rer. nat. Hermann Schwan.

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL I.

EINFÜHRUNG.

Die bedeutenden Fortschritte, die im letzten Jahrzehnt in der Erzeugung und Technik der Dezimeterwellen erzielt wurden, haben die Anwendungen dieses Wellenlängenbereiches auf verschiedenen Forschungsgebieten wesentlich vermehrt. Entsprechend der Bedeutung, die Hochfrequenzmessungen bei einer großen Anzahl von Fragestellungen der Biophysik, physikalischen Chemie, der Chemie und der Hochfrequenztechnik selbst erlangt haben, sind die Anforderungen, die an die Genauigkeit, zugleich aber auch an die Einfachheit der Meßmethoden im Dezimeterwellengebiet gestellt werden, wesentlich größer als dies noch vor wenigen Jahren der Fall war. Die bisher bekannten Verfahren erweisen sich in der heutigen Meßpraxis als unzureichend, wie im folgenden auseinandergesetzt werden soll.

Um die Sachlage an einigen konkreten Beispielen zu erläutern, sei zunächst die Situation in der Biophysik betrachtet. Seit Einführung der Ultrakurzwellentherapie durch ESAU und SCHLIEPHAKE[1] hat die Verwendung hochfrequenter elektrischer Energie in der Medizin ständig an Bedeutung gewonnen. Die Erforschung ihres Wirkungsmechanismus erwies sich sehr bald als dringlich. Auf Grund unserer heutigen Kenntnisse neigen wir dazu, in der Wärmewirkung das für den Heilprozeß biologisch wirksame Moment zu sehen. Alle bisher bekanntgewordenen Arbeiten über sogenannte „spezifische" elektrische Effekte, die den Kurzwellen neben ihrer Wärmewirkung eine irgendwie heilende Wirkung zusprechen, sind umstritten und zum größten Teil nicht einwandfrei durchgeführt. Allerdings bedarf hier die Möglichkeit einer „Mikroerwärmung", bei der die kleinsten Bestandteile des Gewebes individuell erwärmt werden, also einer Wärmewirkung nicht im Sinne der üblichen „makroskopischen" Erwärmung, einer besonderen Diskussion[2].

Die Verteilung der elektrischen Energie und der durch sie verursachten Wärmewirkung im biologischen Gewebe kann nur dann überblickt werden, wenn die elektrischen Konstanten (Leitfähigkeit σ und Dielektrizitätskonstante DK) desselben bekannt sind. Die Bestimmung der Leitfähigkeits- und DK-Werte wurde für alle wichtigen Körpergewebe in einer groß angelegten Untersuchungsreihe durch RAJEWSKY und seine Schule (DÄNZER, GRAUL, GSELL, OSKEN, SCHAEFER, SCHWAN, STACHOWIACK, WACHTER) durchgeführt. Ferner wurden Messungen von OSSWALD, PAETZOLD und WENK[1] vorgenommen. Alle diese Messungen zeigen, daß die bei Niederfrequenz schon länger bekannten Werte im Gebiete der Hochfrequenz ihre Gültigkeit verlieren. Zwischen zehn und einigen tausend Meter Wellenlänge erfahren DK- und Widerstandswerte eine erhebliche Änderung in dem Sinne, daß bei kurzer Wellenlänge die kleineren Werte vorliegen. Das eingehende Studium dieser Erscheinung führte bald zu beträchtlichen Konsequenzen. So vermag man heute aus dem Verlauf der Dispersion Rückschlüsse auf die Eigenschaften des untersuchten Gewebes zu ziehen. Bei Blut z. B. wurde der Aufbau des Blutkörperchens (Membran, die leitfähiges Innere umschließt) vorausgesagt und konnte später durch elektronenoptische Untersuchungen bestätigt werden. Wegen dieser Möglichkeit, durch elektrische Messungen Aufschluß über die Eigenschaften des biologischen Gewebes zu erhalten, kommt den elektrischen Meßmethoden besondere Bedeutung zu. Weiterhin läßt die starke Abhängigkeit der elektrischen Konstanten von der Struktur des untersuchten Gewebes erwarten, daß krankhafte Veränderungen des Gewebes sich in abgeänderten Konstanten erkennen lassen (RAJEWSKY). Der Entwicklung und Anwendung geeigneter Meßverfahren kommt daher mit großer Wahrscheinlichkeit eine wichtige diagnostische Bedeutung zu. Allerdings erfordert dies eine nicht unwesentliche Verbesserung der Meßgenauigkeit, so wie sie mit den in den folgenden Arbeiten niedergelegten Verfahren erreichbar ist.

Auf Grund der von RAJEWSKY und seinen Mitarbeitern durchgeführten Untersuchungen konnten für die Stromverteilung im Gewebe bemerkenswerte Schlußfolgerungen gezogen werden. Das von PAETZOLDT aufgestellte Prinzip der selektiven Erhitzung einzelner Organe erfuhr durch SCHAEFER eine für die medizinische Anwendung entscheidende Korrektur in dem Sinne, daß eine Auszeichnung bestimmter Organe bezgl. der in ihnen entwickelten Wärme nur in bestimmten Fällen, aber auch dann nur geringfügig, vorliegt. Es gibt keine speziellen Wellenlängen, mit deren Hilfe es möglich ist, kranke Organe besonders stark zu erwärmen. Lediglich das Unterhautfettgewebe macht hier eine Ausnahme. Gelänge es, die immer unerwünschte Energieentfaltung in diesem herabzusetzen, so würde die Tiefenwirkung, die das Charakteristikum der Kurzwellen darstellt, gesteigert. Nach SCHAEFERS Angaben besteht hierzu nur ein Weg: Herabsetzung der Wellenlänge, wenn möglich unter 1 m. Die bisher vorliegenden Messungen erstrecken sich aber nur in den seltensten Fällen unter 3 m Wellenlänge. SCHAEFER hat bei seinen Aussagen die sich unter etwa 10 m ergebende Konstanz der elektrischen Konstanten weiter extrapoliert und so seine Forderung nach Wellenlängen unter 1 m abgeleitet. Aus Gründen, die wir aber erst weiter unten berühren, ist die Annahme einer solchen Konstanz etwas gewagt. Es ist zwar anzunehmen, daß eine erneute Änderung der „Konstanten" bei 1 m sich erst geringfügig bemerkbar macht (GSELL[3]). Aber trotzdem muß erst umfangreiches Material über Wellenlängen unter 1 m gewonnen werden, ehe die Möglichkeiten einer neuen „Dezimeterwellentherapie" überblickt werden können. Hauptzweck der vorliegenden Arbeiten ist, die hierzu erforderlichen Grundlagen bereitzustellen.

Für die künftige Entwicklung der medizinischen Anwendung sehr kurzer Wellen ist die Klärung einer weiteren, prinzipiell wichtigen Fragestellung erforderlich, die von RAJEWSKY erkannt und zum Gegenstand systematischer Untersuchungen in seinem Institut gemacht wurde. Hierbei zeigte sich besonders eindringlich, wie wesentlich eine genaue Ermittlung der elektrischen Gewebekonstanten für Dezimeterwellen ist. Eine Reihe von Beobachtungen und Überlegungen sprechen dafür, daß die Anwendung von Dezimeter- und vielleicht Zentimeterwellen den therapeutischen Wirkungsbereich der hochfrequenten Felder erweitert (siehe das oben gebrachte Beispiel).

Die von ESAU und SCHLIEPHAKE eingeführte Kondensatorfeldmethode, bei der sich der Patient zwischen den Platten eines zusammen mit einer Spule in Resonanz befindlichen Kondensators befindet, ist aber nun bei Wellenlängen unter 1 m nicht mehr anwendbar. Die Ursache hierzu beruht auf der Tatsache, daß allein die Größe des Kondensators bei kleinstmöglicher Induktivität, wie sie durch die Zuleitungen vom Sender zum Patienten gegeben ist, eine minimale Resonanzwellenlänge von etwa 1 m ergibt. Die von anderen Autoren vorgeschlagenen Verfahren mit Spulen (KOWARSCHIK, RAAB) versagen aus ähnlichen Gründen im Dezimeterwellengebiet. Man muß hier dazu übergehen, die Energie durch Anstrahlung in den Körper zu bringen (DÄNZER, HOLLMANN). Dies ist am ehesten möglich mit Hilfe von Dipolen, die sich in auf den Körper aufgebundenen Parabolspiegeln befinden und mit dem Dezimeterwellensender durch Energiekabel verbunden sind. Leider erfährt die vom Dipol abgestrahlte Energie an der Grenzfläche Luft-Gewebe eine beträchtliche Reflexion. Die von HOLLMANN[1] entwickelte Theorie der Überanpassung zeigt, wie man diese Reflexion vermindern und somit die in den Körper eingestrahlte Energie groß gestalten kann durch Verwendung geeigneter Füllsubstanzen, die den Parabolspiegel ausfüllen und den Dipol bis zum Gewebe umgeben. Die zweckmäßig zu wählenden DK- und Leitfähigkeitswerte der Füllsubstanz sind von den Gewebedaten abhängig. Die Füllsubstanz kann daher erst dann bestimmt werden, wenn die Ermittlung der elektrischen Daten der Gewebe im Dezimeterwellengebiet durchgeführt ist.

Die bei DK und Leitfähigkeit festgestellten Dispersionserscheinungen ausnahmslos aller biologischen Substanzen können auf verschiedene Weise erklärt werden

(DÄNZER). Sie beruhen entweder auf polaren Effekten (DEBYE) oder auf Grenzflächenaufladungen, wie sie zuerst bei Isolierstoffen beobachtet wurden (WAGNER). Wie DÄNZER[1] zeigte, kann durch eine Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der DK oder Leitfähigkeit allein niemals entschieden werden, welcher Wirkungsmechanismus vorliegt. Dies ist möglich mit Hilfe von Temperaturuntersuchungen, denn der Temperaturkoeffizient von DK und Leitfähigkeit ist bei Vorliegen eines polaren Effektes von dem bei Grenzflächenerscheinungen verschieden (SCHWAN[1]). Einige bisher nicht veröffentlichte Messungen des Temperaturkoeffizienten der DK bei niederen Frequenzen sprechen für das Vorliegen von Grenzflächeneffekten (SCHWAN). Da auf Grund des starken Gehaltes polarer Verbindungen alle Gewebe eine DEBYEsche Dispersion aufweisen müssen, muß diese in einem anderen Wellenlängenbereich zu suchen sein. Der bei extrem langen Wellen wieder stark beginnende Anstieg der DK, den FRICKE und CURTIS fanden, ist kaum so zu erklären. Er dürfte durch Polarisationserscheinungen an den Elektroden verursacht und somit nicht echt sein (SCHWAN). Dagegen glaubt der Verfasser, daß die von GSELL[3] zwischen 1 m und 50 cm Wellenlänge an Blut beobachtete geringfügige Änderung der Leitfähigkeit polaren Ursprungs ist. Der Effekt ist jedoch verglichen mit der Meßgenauigkeit sehr gering und bedarf daher der Bestätigung durch genauere Untersuchungen im Dezimeterwellengebiet.

Es ergeben sich somit zusammenfassend die folgenden Fragen: 1. Liegt im Dezimeterwellengebiet eine Dispersion der elektrischen Konstanten biologischen Materials vor? Wenn ja, welches sind die Konsequenzen für den Wirkungsmechanismus der Dezimeterwellenstrahlung im biologischen Gewebe? 2. Welche Bedeutung hat die Verwendung von Dezimeterwellen betreffs des Problems der Fettgewebswärmeentlastung? 3. Welche Füllsubstanzen sind in den bei Dezimeterwellen erforderlichen Parabolspiegeln für Körperbestrahlung zu verwenden? Zur Beantwortung all dieser Fragen sind hinreichend genaue und für die Durchführung systematischer, umfangreicher Reihenuntersuchungen geeignete Meßmethoden erforderlich. Betrachten wir die diesbezüglich vorliegende Situation, so ergibt sich das folgende Bild: In dem Gebiet um 3 m Wellenlänge wurden die von DÄNZER, OSSWALD, SCHAEFER und anderen durchgeführten Messungen an Lecherleitungen nach einer Substitutionsmethode durchgeführt. Bei dieser wurde das am Ende der Lecherleitung in einem Gefäß angeschlossene Gewebe mit einer KCl-Lösung verglichen, deren Konzentration so lange variiert wurde, bis sie den gleichen Erregungszustand der Lecherleitung ergab, wie er bei Messung des Gewebes gegeben ist und die Leitfähigkeit der KCl-Lösung, die bis zu 3 m Wellenlänge herab keine Dispersion besitzt, mit einer Wheatstonebrücke bei etwa 1000 Hz bestimmt. Diese Leitfähigkeit kann nur dann mit der Leitfähigkeit des biologischen Materials gleichgesetzt und letztere so ermittelt werden, wenn die Verschiebungsströme in Gewebe und KCl-Lösung entweder annähernd gleich oder aber vernachlässigbar klein sind. Denn die Erregung der Lecherleitung ist bei anteilmäßig nicht vernachlässigbarem Verschiebungsstrom auch durch diesen beeinflußt (siehe hierzu im mathematischen Teil der Einführung die Bedeutung von ρ auf das Wellenverhältnis). Ähnlich liegen die Verhältnisse bei einer vom Verfasser benutzten Substitutionsmethode zur Bestimmung der DK. Der Gültigkeitsbereich dieses Verfahrens wird in Kapitel III der vorliegenden Arbeit in Anbetracht der bestehenden Einfachheit dieses Verfahrens daher näher untersucht. Leider ist die Voraussetzung vernachlässigbaren Verschiebungsstromes für biologisches Gewebe unter 3 m Wellenlänge nicht mehr erfüllt. So ergaben einige nicht veröffentlichte Messungen des Verfassers mit der von SCHAEFER benutzten Methode einen beträchtlichen scheinbaren Anstieg der Leitfähigkeit von Milzgewebe bei Abfall der Wellenlänge bis zu 60 cm. Ein solcher Anstieg ist aber unmöglich.

GSELL[3] versuchte, das Substitutionsverfahren durch „doppelte" Substitution für das Dezimeterwellengebiet zu retten, indem er bei der Vergleichsflüssigkeit nicht nur die Leitfähigkeit, sondern durch Zugabe von Dioxan ($\varepsilon = 2{,}1$) auch die DK variierte. Da aber bei Zugabe von Dioxan die Leitfähigkeit und bei Zugabe von

KCl-Konzentrat die DK der Vergleichslösung beeinflußt wird, ist dieses Verfahren sehr schwerfällig. Es ist praktisch nicht möglich, auf diese Weise eine hohe Meßgenauigkeit zu erreichen. Der Haupteinwand gegen die Methode ist jedoch, daß die Substiutionsflüssigkeiten selbst unter 1 m Wellenlänge nicht mehr wellenlängenunabhängige Konstanten aufweisen. Dieser Einwand betrifft auch alle anderen Vergleichsmethoden, unter ihnen vor allem die Brückenmethoden, insbesondere die von Wien entwickelte, bei längeren Wellen mit so großem Erfolg angewandte Baretteranordnung, die von Dänzer, Osswald u. a. für biologische Zwecke benutzt wurde. Es ist somit unbedingt notwendig, im Dezimeterwellengebiet absolute Methoden ausreichender Genauigkeit an Stelle der bisher üblichen Relativmethoden für die Messung biologischen Materials zu entwickeln.

Mit diesen Methoden muß es möglich sein, einen Bereich der DK und Leitfähigkeit zu umfassen, wie er durch die Verschiedenartigkeit der einzelnen Gewebearten und Flüssigkeiten (Blut, Serum usw.) gegeben ist, d. h. der Anwendungsbereich der Methode muß möglichst groß sein. Das im Kapitel II vorgeschlagene Resonanzverfahren genügt dieser Forderung, da sein Meßbereich größer als der irgend eines anderen bisher bekannten Dezimeterwellenverfahrens ist.

Auch im Gebiet der physikalischen Chemie kommt der Entwicklung einfacher Dezimeterwellen-Meßmethoden große Bedeutung zu. Es handelt sich hier vor allem darum, die von Debye und anderen Autoren entwickelten Vorstellungen nachzuprüfen. Hiernach müssen die elektrischen Konstanten aller Flüssigkeiten, deren Moleküle eine polare Struktur besitzen, Dispersionserscheinungen aufweisen. Die „Sprungwellenlänge“, d. i. die Wellenlänge, für die die stärkste Änderung der betrachteten Konstanten vorliegt, ist u. a. abhängig von der Größe der polaren Molekeln. Sie liegt bei den meisten Substanzen im Gebiet kürzester elektrischerWellen (Zentimeter- bis Meterwellenbereich). Die Bestimmung dieser für die Dispersion charakteristischsten Konstanten erfordert somit Untersuchungen der DK und Leitfähigkeit (bzw. des Reflexions- und Absorptionskoeffizienten, die mit DK und σ einfach zusammenhängen) vor allem im Dezimeterwellenbereich.

Versuche, die DK und Leitfähigkeit wässriger Lösungen bei kurzen elektrischen Wellen zu bestimmen, wurden bereits zu Ende des vorigen Jahrhunderts unternommen. Zu dieser Zeit entwickelte Drude[5] seine bekannt gewordene 1. und 2. Methode zur Bestimmung der DK und schuf damit die Grundlagen der modernen Leitungsmeßtechnik. In seinen Arbeiten ist zum ersten Male eine exakte Berechnung der Abhängigkeit der Spannungsverteilung längs einer Leitung vom am Ende der Leitung angeschlossenen beliebig komplexen Widerstand gebracht. Diese Arbeit ist bis heute, wenn auch in für uns unmoderner Form entwickelt, bedeutend geblieben. Die von Drude mit primitivstem Behelf ermittelten Stoffkonstanten haben zum größten Teil keine Korrektur erfahren. Die Erfassung von Leitfähigkeitswerten dagegen ist Drude noch nicht einwandfrei gelungen.

Wenden wir uns den Arbeiten der letzten Jahrzehnte zu, so erscheinen vor allem die von Hellmann, Rieckhoff und Zahn[6] bemerkenswert. Zahns „Dekrementsmethode“ wurde zunächst am quasistationären Gebilde entwickelt. Leider sind hierbei infolge der Außerachtlassung der Unterschiede, die zwischen frei ausschwingenden und erzwungenen Schwingungen bestehen, Fehler unterlaufen. Hierauf und auf die sich für den physikalischen Chemiker ergebenden Konsequenzen bezgl. der von Zahn gewonnenen Ergebnisse kann hier nicht näher eingegangen werden. Ebenso sind Einwände gegen eine spätere Arbeit von Zahn zu machen, die sich mit der Meßmethodik der Lecherleitung beschäftigt (siehe hierzu die diesbezgl. Bemerkung im Kapitel II). Hellmanns[7] Methode, die Reflexion bei Eintritt der Welle in ein unbegrenzt angenommenes Medium zu bestimmen und hieraus die DK zu berechnen, ist zwar exakt. Sie hat aber den Nachteil, zu nicht einfach übersehbaren Formeln zu führen und sagt nichts über die Bestimmung der Leitfähigkeit aus. Außerdem bedarf sie bei nicht sehr stark leitenden Flüssigkeiten erheblicher Mengen an Untersuchungslösung, wenn die gemachte Voraussetzung des Totlaufens der

Welle in der Elektrolytlösung erfüllt sein soll. Den gleichen Nachteil besitzt eine in jüngster Zeit von PRACHER[8] angegebene Methode, mit der die Leitfähigkeit, nicht aber die DK, aus dem Abfall der Spannung längs einer Leitung, die vom zu untersuchenden Material umgeben ist, ermittelt werden kann. Gerade aber Messungen an verdünnten Lösungen sind bekanntlich wichtig, um die von DEBYE-FALKENHAGEN entwickelten theoretischen Vorstellungen nachprüfen zu können. Es ist daher von großer Bedeutung, zu untersuchen, welches der Einfluß einer nur ein kurzes Leitungsstück umgebenden Flüssigkeit auf den Erregungszustand der gesamten Leitung ist und wie sich DK und Leitfähigkeit der Flüssigkeit aus diesem Einfluß bestimmen lassen. Im Besitz einer solchen Methodik vermag man alle den physikalischen Chemiker interessierenden Fragen bezgl. der elektrischen Dispersionserscheinungen zu beantworten.

Ähnliches gilt bezüglich der zunehmend an Interesse gewinnenden magnetischen Dispersionserscheinungen. Aus den letzteren lassen sich wichtige Folgerungen atomphysikalischen Inhaltes ziehen. Es wurde daher ganz allgemein von der Annahme ausgegangen, daß Substanzen vorliegen, die nicht nur elektrische, sondern auch magnetische Eigenschaften aufweisen. Im allgemeinsten Fall besitzt ein Material also eine DK (ε) und eine Permeabilität (μ), die ungleich 1 ist. Ferner sind gewisse dielektrische und magnetische Verluste gegeben, die sich durch die Verlustfaktoren $\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon$ und $\operatorname{tg} \vartheta_\mu$ quantitativ charakterisieren lassen (siehe hierzu weiter unten). In Kapitel V werden wir sehen, wie sich aus dem Erregungszustand einer Leitung diese vier Konstanten am zweckmäßigsten errechnen lassen. Wir können also von beliebigen Flüssigkeiten und festen Materialien dielektrische und magnetische Konstanten bestimmen. Dies ist außer in den oben erwähnten Beziehungen auch für viele andere Wissenschaftszweige wichtig. Als Beispiel sei hier nur das Interesse des Chemikers an den elektrischen Eigenschaften vieler in den letzten Jahren entwickelten Kunststoffe erwähnt. Aus den elektrischen Konstanten dieser Materialien lassen sich oft wertvolle Hinweise auf die chemische Struktur derselben ableiten, da diese die elektrischen Konstanten bestimmt.

Das größte Interesse an der Entwicklung von Dezimeterwellenmeßmethoden hatte vor allem in den letzten Jahren die Hochfrequenztechnik selbst. Hier lag das Problem vor, Widerstandsbestimmungen an beliebig komplexen Impedanzen bei Dezimeterwellen vorzunehmen. Es zeigte sich bald, daß die Anwendung quasistationärer Methoden versagt (siehe hierzu Kapitel II). So wandte man sich der erstmalig von DRUDE mit großem Erfolg benutzten Lecherleitung zu und entwickelte diese zu beachtlicher Vollkommenheit. Wir unterscheiden heute zwei verschiedene Aus-

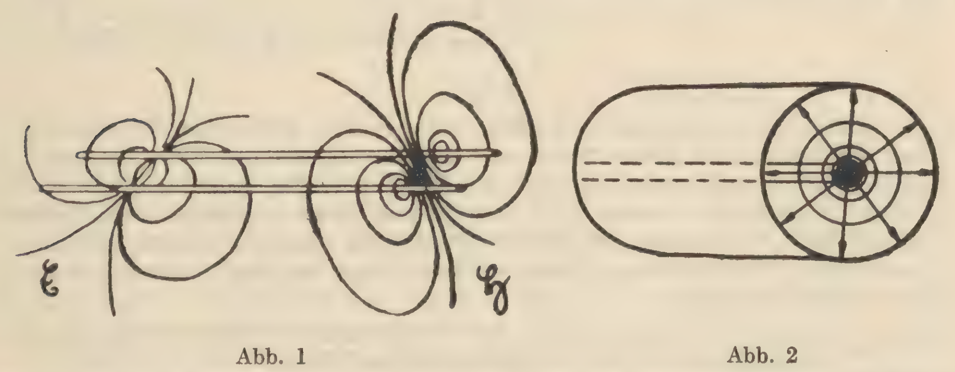


Abb. 1 Abb. 2

führungsformen der Lecherleitung: die offene und die geschlossene Bauform. Bei der offenen Ausführung dienen zwei parallele Drähte zur Fortleitung der Welle, bei der geschlossenen wird ein Leiter von einem zweiten umgeben (Abb. 1 und 2). Bei der geschlossenen Ausführung verläuft das gesamte elektromagnetische Feld im Innern des umfassenden Leiters. Sie hat vor der offenen Bauform daher den Vorteil, daß

äußere Einflüsse auf das Feld nicht einwirken können (z. B.: Nähern einer Hand usw.). Die in der Hochfrequenztechnik heute meist benutzte Form ist die geschlossene Ausführung, bei der Innen- und Außenleiter kreisförmig sind und sich konzentrisch umgeben. Der Aufbau einer solchen Leitung bedingt einen größeren Aufwand als der einer offenen Doppeldrahtleitung.

Die bei Anwendung von Lecherleitungen zur Benutzung kommenden Verfahren lassen sich in zwei Gruppen einteilen: die Resonanzverfahren und das Abtastverfahren. Allen Resonanzverfahren gemeinsam ist, daß die gesamte Leitung, an deren einem Ende die zu untersuchende Impedanz bzw. Materialprobe sich befindet, mit der erregenden Welle auf Resonanz abgestimmt wird, d. h. daß gewisse Ströme oder Spannungen einen Maximalwert erreichen. Die Resonanzabstimmung geschieht hierbei entweder durch Variieren der Wellenlänge des Senders oder durch Verändern der Leitungslänge mittels eines an dem der Probe abgewandten Leitungsende befindlichen verschiebbaren Kurzschlußbügels. Neben der Resonanzwellenlänge bzw. Resonanzleitungslänge wird eine Resonanzkurvenbreite bestimmt. Diese ist durch die Verstimmung der Wellenlänge bzw. Leitungslänge definiert, die erforderlich ist, um den betrachteten Resonanzstrom (bzw. Spannung) um den Faktor $\sqrt{2}$ zu verringern. Die beiden so gemessenen, für die Resonanzkurve charakteristischen Werte lassen dann auf die Komponenten der meist an einem Ende der Leitung angeschlossenen, zu bestimmenden Impedanz schließen. Bisher sind Resonanzverfahren nur für Fälle angewandt worden, bei denen eine kräftige Resonanzerregung der Leitung möglich war. Diese ist immer dann erreichbar, wenn der die Leitung abschließende Widerstand so stark reflektiert, daß eine kräftige, stehende Wellenverteilung ermöglicht wird. Stark dämpfende Impedanzen können mit den bisher entwickelten Resonanzverfahren daher nicht gemessen werden.

Demgegenüber gestattet das Abtastverfahren bevorzugt die Bestimmung stark dämpfender Widerstände. Bei diesem Verfahren ist es nicht erforderlich, die Leitung auf Resonanz abzustimmen. Die bei ihm verwandte Anordnung ergibt sich aus Abb. 3. Der Sender, der die für die Messung erforderliche Energie liefert, und

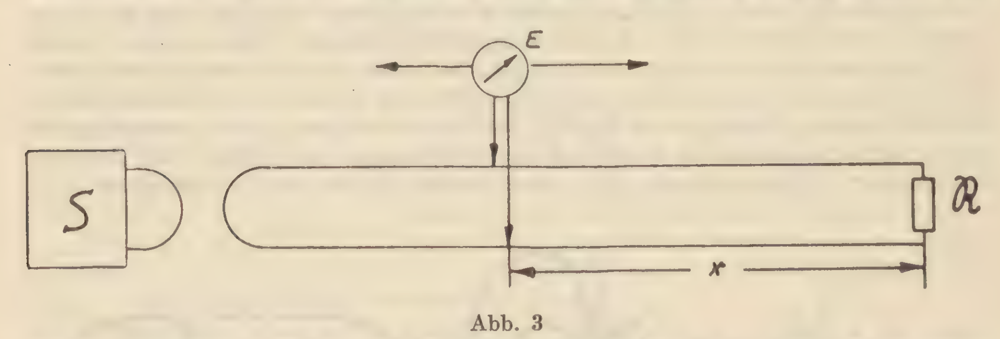


Abb. 3

der zu bestimmende Widerstand $\mathfrak{R}$ sind an den beiden Enden der Leitung angebracht. Der Sender wird hierbei so schwach angekoppelt, daß sein Erregungszustand von der Leitung nicht beeinflußt wird. Mit Hilfe eines Empfängers E, der mittels kapazitiver Kopplung so lose an die Leitung angeschlossen ist, daß er deren Wellenverteilung nicht beeinflußt, wird durch Verschieben längs der Leitung die Spannungsverteilung auf derselben abgetastet. Es sei kurz dargelegt, was so gemessen wird[1]). Wir bezeichnen

$p = \rho e^{i\varphi}$ komplexer Reflexionsfaktor des Abschlusses $\mathfrak{R}$ (Verhältnis der von S ankommenden zu der von $\mathfrak{R}$ reflektierten Welle)

x Abstand des Empfängers von $\mathfrak{R}$

λ Wellenlänge.

Dann läßt sich die auf $\mathfrak{R}$ zulaufende Welle in der Form

[1]) Siehe z. B. Knol und Strutt[9]!

$$u_h = U_o \cos\left(\omega t + 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

und die von $\mathfrak{R}$ reflektierte Welle durch

$$u_r = U_o \rho \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi\right)$$

im Abstand x vom Ende $\mathfrak{R}$ darstellen. Daraus folgt für die Amplitude U der Summe beider Wellen nach dem cos-Satz

$$U^2 = U_o^2 \left[1 + \rho^2 + 2\rho \cos\left(4\pi \frac{x}{\lambda} - \varphi\right)\right]. \tag{1}$$

Für das Minimum der Wellenverteilung gilt ($x = x_o$!)

$$\varphi = 4\pi \frac{x_o}{\lambda} + (2n + 1)\pi \quad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{2}$$

$$U_{\min} = U_o (1 - \rho). \tag{3}$$

Das Maximum hat den Wert

$$U_{\max} = U_o (1 + \rho), \tag{4}$$

so daß der Quotient

$$\frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \tag{5}$$

nur eine Funktion von ρ ist. Die Bestimmung des Wellenverhältnisses

$$W = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} \tag{6}$$

und eines Wertes x_o gestatten somit mit Hilfe der Gleichungen (2) und (5) eindeutig den Reflexionskoeffizienten p nach Betrag und Phase zu ermitteln. (Wie aus p der Widerstand berechnet wird, ist weiter unten dargelegt.)

Die Messung des Wellenverhältnisses ist natürlich besonders einfach, wenn Maximum und Minimum der Verteilung nicht zu verschieden von einander sind, d. h. wenn ρ klein bzw. wenn die Probe oder Impedanz $\mathfrak{R}$ schwach reflektierend ist. Bei starker Reflexion wird das Minimum sehr klein und daher schlecht bestimmbar. Man hilft sich hierbei, indem man an Stelle des Maximums die x-Werte links und rechts von x_o bestimmt, für die U den $\sqrt{2}$fachen Wert von $U_{\min}$ annimmt[10]. So vermeidet man die Schwierigkeit, den Empfänger für große Meßbereiche einwandfrei entwickeln zu müssen. Der Abstand der beiden x-Werte mit $U = \sqrt{2}\, U_{\min}$ wird als Knotenbreite B bezeichnet und steht mit W in einfacher Beziehung. Es gilt nämlich, wie aus Gleichung (1) leicht herleitbar ist

$$\frac{1}{W^2} = 1 + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{B}{\lambda}\right)}. \tag{7}$$

Trotz der Einführung der Knotenbreite bleibt die Schwierigkeit bestehen, daß bei kleinem Minimum dasselbe sehr störanfällig ist. Die geeignete Oberwelle des Senders kann leicht eine Amplitude im Minimum der Grundwelle erzeugen, die die Minimumablesung vollkommen verfälscht. Hierzu kommen die hohen Anforderungen, die an den Empfänger zu stellen sind. Aus all dem folgt, daß das Abtastverfahren nur für stark dämpfende Impedanzen geeignet ist.

De r hauptsächliche Vorteil des Abtastverfahrens dürfte in seiner einfachen mathematischen Grundlage zu erblicken sein. Dies ist sicher auch der Grund, weshalb es in der Hochfrequenz-Technik vor allem zur Anwendung kommt. Seine Einführung ist in erster Linie auf die wichtige Arbeit von O. SCHMIDT[11] zurückzuführen.

Die Nachteile sind folgende: Die Bewegung des Empfängers längs der Leitung ist ohne Beeinflussung der Wellenverteilung nur bei geschlossenen Ausführungen

möglich. Es ist also weit mehr durch das Abtastverfahren als durch die Empfindlichkeit der offenen Bauweise bedingt, daß praktisch alle Ausführungen heute geschlossen sind. Die geschlossene, meist konzentrisch ausgeführte Leitung besitzt einen schmalen Schlitz, durch den eine kleine Antenne den Innenleiter kapazitiv ankoppelt. Der Abstand dieses Schlitzes vom Innenleiter muß bei Verschiebung längs der Leitung äußerst genau konstant bleiben, wenn nicht durch Abstandsschwankungen die Empfängerangaben beeinflußt werden sollen. Die Führung des Abtastorganes muß daher mit der größten Präzision gearbeitet sein. Dasselbe gilt für die exakte Lagerung des Innenleiters. Letzteres bedingt bei nicht zu kurzer Wellenlänge und entsprechend langer Leitung Halterungen des Innenleiters. Diese Halterungen wiederum müssen mit besonderer Sorgfalt hergestellt und erprobt werden, wenn sie nicht die Spannungsverteilung längs der Leitung maßgebend beeinflussen sollen. In Kapitel V werden wir hierauf näher eingehen.

Auf die Notwendigkeit der Verwendung absolut oberwellenfreier Erregung der Leitung wurde bereits hingewiesen. Sie wird sich in praxi nur durch Resonanzeinrichtungen, die zwischen Sender und Leitung geschaltet sind, erreichen lassen. Hieraus folgt, daß das Abtastverfahren sich nur in Verbindung mit Resonanzeinrichtungen für größeren Meßbereich herrichten läßt. Es erhebt sich hier die Frage, ob sich nicht eine bessere Kombination finden läßt, die die Vorteile des Abtastverfahrens (einfache Grundlage) mit denen des Resonanzverfahrens (Maximum-Untersuchung) verbindet. In Kapitel II werden die Grundlagen eines neuen Verfahrens gewonnen, das diese Verbindung in idealer Weise herstellt und zudem mit seinem Anwendungsbereich die des Abtast- und Resonanzverfahrens umfaßt.

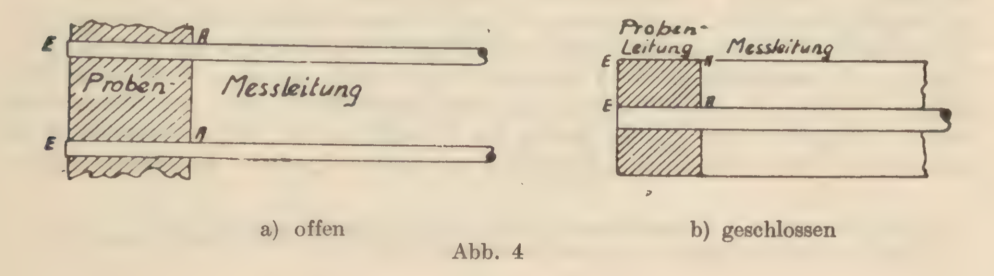
Studiert man die Arbeiten, die bisher zur Entwicklung von Resonanzverfahren durchgeführt wurden, so fällt auf, daß die Beschränkung des Verfahrens auf schwach dämpfende Impedanzen eine freiwillige ist: Bei Ableitung der mathematischen Grundlage des jeweils verwandten Verfahrens wurde zwecks Erreichung einfach zu handhabender Formeln von Anfang an die Voraussetzung kleiner Resonanzkurvenbreite gemacht. So ist dies bei DAHME[12] der Fall, der Kabeldämpfungen untersucht, indem er mit Meterwellen Kabelstücke in Resonanz erregt. Als Vorzüge der Arbeit von DAHME sind die saubere Formulierung der Voraussetzungen (wobei sonst viel gesündigt wird) und die Erfassung des Einflusses des Meßorganes zu nennen. Nachteilig ist neben der Beschränkung des Verfahrens auf Kabel geringer Dämpfung die Kompliziertheit der Formeln, und die Unmöglichkeit, DK-Bestimmungen vorzunehmen. KÜSTER[13] hat DAHMES Methode für Zentimeterwellen entwickelt, um die Eigenschaften keramischer Isolierstoffe zu bestimmen. Bei ihm findet sich kein Hinweis, ob und wie stärker dämpfende Substanzen untersucht werden können. Das Gleiche gilt für die Arbeiten aller übrigen Autoren (DITL[14], KAUFMANN[15], BRÜCK[16]). In diesem Zusammenhang verdient die Arbeit von BRÜCK[16] besondere Erwähnung, da in ihr ein Vergleich des Abtast- mit dem Resonanzverfahren vorgenommen wird und BRÜCK zu einer Abgrenzung des Anwendungsbereiches beider Verfahren gelangt. Das von BRÜCK diskutierte Resonanzverfahren ist inhaltlich mit dem ersten der in Kapitel II beschriebenen Verfahren identisch, wenn wir das letztere nur für geringe Resonanzkurvenbreiten formulieren. Auch BRÜCK ist der Ansicht, daß Resonanzverfahren nur für schwach dämpfende Impedanzen brauchbar sind, ohne zu erkennen, daß diese Beschränkung durch die gleich zu Beginn der Abhandlung gemachte Voraussetzung kleiner Resonanzkurvenbreite bedingt ist. Wir werden demgegenüber zeigen, daß das letzte der in Kapitel II mit geringem apparativem Aufwand auskommende Resonanzverfahren den Meßumfang des Abtastverfahrens umschließt.

Ein weiterer Punkt scheint dem Verfasser von großer Wichtigkeit. Bei den bisher meist benutzten Abtastverfahren erfordert die exakte Halterung der Leiter die Verwendung meist mehrerer Stützen. Über den Einfluß dieser Halterungen liegt bisher nur wenig Material vor. Erst in jüngster Zeit sind einige Arbeiten erschienen, unter denen der von WEISSFLOCH[17] mitgeteilte Transformationssatz, sowie vor allem aber

die von MEINKE[18] mitgeteilten Ergebnisse über stoßfreie Bauelemente beachtenswert sind. Der von WEISSFLOCH gefundene Transformationssatz gestattet, die Wirkung einer Halterung durch eine einfache Transformation darzustellen. In der Arbeit MEINKES wird sie durch Einführung einer gewissen Längenkorrektur charakterisiert. Die in Kapitel IV der vorliegenden Arbeit niedergelegten Überlegungen sind in einigen Punkten den Abhandlungen MEINKES verwandt. Sie haben vor MEINKES Formeln jedoch den großen Vorteil, daß die interessierenden Korrekturgrößen nur von experimentell leicht erfaßbaren Werten abhängen, was bei MEINKE nicht der Fall ist. Erstmalig wird in diesem Kapitel dargelegt, welch großen Einfluß Halterungen auf die Bestimmung der am Ende der Leitung angeschlossenen Impedanzen haben können und die Möglichkeit gegeben, die so entstehenden Fehler abzuschätzen. Aus alldem folgt, daß man von der Verwendung der Stützen möglichst absehen soll. Die in Kapitel III beschriebene Anordnung berücksichtigt dies, indem sie nur eine Halterung erfordert.

Beim Studium der Literatur vermißt man ferner die Behandlung einer Reihe praktisch wichtiger Problemstellungen. Sie betreffen die Frage nach den Fehlern, die bei nicht einwandfreiem Sitz der zu untersuchenden Proben entstehen, die Frage des Anwendungsgebietes der Substitutionsmethoden, das Problem des Einflusses besonderer Konstruktionseigenarten (Schlitz in konzentrischer Leitung, geringe Exzentrizität des Innenleiters) usw. Der Behandlung dieser Einzelfragen ist daher ein großer Teil des dritten Kapitels gewidmet worden.

In den Kapiteln II, III und IV werden alle Fragen, die den Aufbau einer Resonanzleitung großen Meßbereiches betreffen, wie oben dargelegt, behandelt. Die als günstigst erkannte Anordnung besteht aus einem Kurzschlußschieber, der das eine Ende der Leitung abschließt. An ihm ist ein induktiv erregter Empfängerkreis angebracht. Der zu untersuchende Widerstand liegt am anderen Leitungsende, der Sender koppelt irgendwo in der Mitte der Leitung induktiv an. Die Stellung der Kurzschlußbrücke und die durch ihr Verschieben aufnehmbare Resonanzkurve sind die Meßwerte, aus denen sich die Daten des zu bestimmenden Widerstands rechnerisch ergeben. Mit einer solchen Anordnung ist es ebenso wie bei allen anderen Verfahren zunächst nur möglich, Reflexionskoeffizienten zu bestimmen. Wie sich aus diesen die Komponenten eines am Ende der Leitung befindlichen Widerstandes ermitteln lassen, wird weiter unten kurz gezeigt. Schwieriger ist es dagegen, das Problem zu beantworten, wie sich die Konstanten eines dielektrischen oder magnetischen Materials aus dem gemessenen Reflexionskoeffizienten der Materialprobe ergeben. Ihm sind die Ausführungen des Kapitels V gewidmet. Es wird dabei der einfachste, in praxi meist gegebene Fall vorausgesetzt, daß die Probe das Ende der Leitung umgibt bzw. ausfüllt, ohne daß die Leiterdimensionen abgeändert sind (Abb. 4). Es ist dann also sozusagen an die eigentliche „Meßleitung" eine zweite Leitung angeschlossen, deren Leiter die gleichen Dimensionen wie die der Meßleitung besitzen und deren Länge durch die Dicke der Proben gegeben ist. Das Dielektrikum dieser „Probenleitung" ist dabei nicht Luft, sondern wird durch das auszumessende Material gebildet. Es liegt nun die folgende Situation vor. Die Probenleitung besitzt an den Punkten A einen gewissen Eingangswiderstand, der von den Leiterdimensionen, den Materialkonstanten des Dielektrikums und der Wellenlänge abhängt.



a) offen b) geschlossen

Abb. 4

Die Meßleitung vermag nur diesen Eingangswiderstand wahrzunehmen, ohne zu erkennen, wie er zustande kommt. Er kann z. B. durch einen punktförmig konzentrierten komplexen Widerstand oder durch eine andere Probenleitung anderer Länge bei abgeändertem Dielektrikum genau so gegeben sein. Es kann daher nur ein rein mathematisches Problem sein, zu entscheiden, welches Dielektrikum vorliegen muß, um bei der als bekannt voraussetzbaren Probenleitungslänge in A den gemessenen Eingangswiderstand zu erzielen. Wir werden sehen, daß sich die beiden Komponenten des Eingangswiderstandes eindeutig aus den beiden Werten ρ und W, die gemessen werden, bestimmen lassen. Aus den beiden Komponenten des Eingangswiderstandes können sich natürlich aber nicht alle vier, die elektrischen und magnetischen Eigenschaften des Dielektrikums charakterisierenden Werte DK ε, Permeabilität μ, $\operatorname{tg}\vartheta_\varepsilon$, $\operatorname{tg}\vartheta_\mu$[1]) bestimmen lassen. Zu den hierzu erforderlichen vier Bestimmungsgrößen gelangt man, wenn die Meßwerte ρ und W zweimal gemessen werden, wobei das Ende der Probenleitung (EE) mit zwei verschiedenen Widerständen abgeschlossen wird. Am einfachsten ist der Fall, daß einmal das Ende offen gelassen und sodann durch eine Metallscheibe kurzgeschlossen wird. Diese Methode hat sich allgemein eingebürgert und man spricht sinngemäß von Leerlauf- und Kurzschlußmessung.

Die Berechnung der vier Materialkonstanten aus den vier Meßwerten, die im Leerlauf- und Kurzschlußmeßgang gewonnen werden, ist nicht einfach. Eine ähnliche Problemstellung interessiert die Kabeltechniker, die Aufschluß über die Qualitäten von Kabeln erlangen wollen und zu diesem Zweck den Eingangswiderstand eines am der Messung abgewandten Kabelende zunächst offenen und dann kurzgeschlossenen Kabelstückes messen. Das hier zur Anwendung gelangende rechnerische Verfahren ist u. a. bei FELDKELLER[19] niedergelegt und recht umständlich[2]). Es ist im wesentlichen übereinstimmend mit dem ersten der in Kapitel V niedergelegten Verfahren, jedoch ist in den Gleichungen des Kapitels V der Einfluß von Fehlmessungen leichter zu übersehen. Alle heute in Kabelmeßtechnik und Dezimeterwellengebiet gebräuchlichen Verfahren stimmen mit geringen Varianten mit dieser Methode überein. Die sich beim praktischen Arbeiten ergebenden Schwierigkeiten, die durch den für die Anwendung des Verfahrens erforderlichen Zeitaufwand gegeben sind, haben mich veranlaßt, Vereinfachungen anzustreben. Es gelang, die in Kapitel V an zweiter Stelle gebrachte komplexe Methode zu entwickeln, die gleiche Allgemeingültigkeit wie das bekannte Verfahren hat, vor diesem aber den Vorteil aufweist, daß die erforderliche Rechenarbeit nur etwa ein Drittel an Zeit wie bei der bekannten Methodik erfordert. Außerdem besitzt das neue Verfahren den Vorteil größerer Übersichtlichkeit.

In den meisten Fällen ist es nicht erforderlich, alle vier Stoffkonstanten zu ermitteln. So ist z. B. meistens μ gleich 1 und kein magnetischer Verlust gegeben, oder aber es sind andere vereinfachende Voraussetzungen wie geringe Probendicke, geringe Verluste usw. erfüllt. In all diesen Fällen lassen sich die Auswerteverfahren sehr vereinfachen. Die sich so ergebenden einfachen Methoden haben für den Praktiker, der viele Bestimmungen durchführen muß, natürlich große Bedeutung. In der Literatur finden sich merkwürdigerweise kaum Hinweise auf die Vereinfachungen, die die komplizierten Verfahren in den genannten Fällen erfahren. Sie sind daher erstmalig in Kapitel V abgeleitet und zusammengestellt worden. Dem Verfasser ist lediglich die Arbeit von UNTERMANN[22] als in dieser Richtung bedeutend bekannt. UNTERMANN hat sich mit dem Falle des Vorliegens rein dielektrischer Proben ($\mu = 1, \operatorname{tg}\vartheta_\mu = 0$) beschäftigt. Sein Verfahren ist wesentlich einfacher als die allgemein gültige Methodik. Es gliedert sich in zwei Teile. Der erste Teil dient zur Bestimmung zweier Hilfsgrößen α und β, der zweite der Berechnung der DK und Leitfähigkeit aus α und β. Das zu Beginn des Kapitels V gebrachte allgemeine Auswerteverfahren

[1]) Zur Defination der Verlustfaktoren $\operatorname{tg}\vartheta_\varepsilon$ und $\operatorname{tg}\vartheta_\mu$ siehe Kapitel V, p. 2.
[2]) Siehe auch die Arbeiten von Kaden[20] und Sommer[21].

besitzt den gleichen Aufbau. Es ergibt die von UNTERMANN angegebenen Formeln für DK und Leitfähigkeit, wenn es für $\mu = 1$, $\operatorname{tg}\vartheta_\mu = 0$ spezialisiert wird. Die von mir entwickelten Verfahren wurden Herrn UNTERMANN vor Abfassung seiner Arbeit mitgeteilt. Unter anderem gehört dazu genau das von UNTERMANN beschriebene Verfahren, DK und Leitfähigkeit aus α und β zu berechnen, wenn $\mu = 1, \operatorname{tg}\vartheta_\mu = 0$ gilt. Die Formeln, die DK und Leitfähigkeit aus α und β für den Fall $\mu = 1, \operatorname{tg}\vartheta_\mu = 0$ zu bestimmen gestatten, sind übrigens schon länger bekannt. So werden sie z. B. von R. BECKER[23] in seinem Buch mitgeteilt. Die Bestimmung von α und β dagegen ist bei UNTERMANN einfacher als bei mir. Sie ist unter Verwendung der komplexen Funktion $z \cdot \operatorname{tg} z$ sehr leicht möglich. UNTERMANN ist es entgangen, daß die Verwendung der Funktion $z \cdot \operatorname{tg} z$ die Ermittlung der Werte dielektrischer Proben unter Vermeidung der Hilfsgrößen α und β direkt in einfachster Weise gestattet. Das sich so ergebende Verfahren ist ebenfalls in Kapitel V gebracht. Seine Überlegenheit gegenüber dem UNTERMANNschen Verfahren ist der Grund dafür, daß ich nicht das erste der in Kapitel V gebrachten Verfahren in der mir bekannten, UNTERMANN mitgeteilten Form für den Fall $\mu = 1$, $\operatorname{tg}\vartheta_\mu = 0$ spezialisiert angegeben habe. Als besonders wertvoll bleibt an der Arbeit von UNTERMANN, daß dieser die Funktionen $z \cdot \operatorname{tg} z$ und $z \cdot \operatorname{ctg} z$ in weitem Bereich berechnet und dargestellt hat.

Ehe wir uns nun der eingehenden Behandlung der angegebenen Probleme in den folgenden Kapiteln zuwenden, seien zum besseren Verständnis die Grundlagen der Leitungstheorie, die in der folgenden Arbeit vorausgesetzt werden, kurz abgeleitet¹). Bezeichnen wir mit R_L, G_L, L_L und C_L Längswiderstand, Querleitwert, Induktivität und Kapazität der Längeneinheit einer Lecherleitung, so gilt offensichtlich (Figur!) für Strom (i) und Spannung (u):

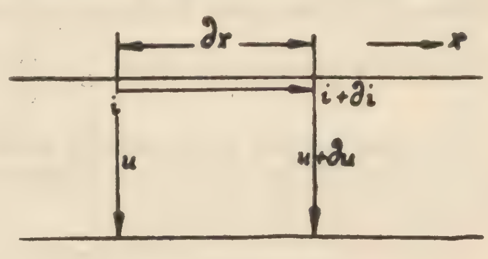


Abb. 5

$$iR + L\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{8}$$

$$uG + C\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial i}{\partial x}. \tag{9}$$

Das System dieser partiellen Differentialgleichungen besitzt bei sin-förmiger Erregung der Leitung die allgemeinen Lösungen

$$U = u_1 e^{-\gamma x} + u_2 e^{+\gamma x} \tag{10}$$

$$J = \frac{1}{\mathfrak{z}}\, u_1 e^{-\gamma x} - \frac{1}{\mathfrak{z}}\, u_2 e^{+\gamma x}, \tag{11}$$

wobei u_1 und u_2 die zwei durch spezielle Randbedingungen festzulegenden Integrationskonstanten des Problems und U und J die Amplituden der Schwingungen

$$u = U\, e^{j\omega t} \qquad i = J\, e^{j\omega t} \tag{12}$$

sind ($j = \sqrt{-1}$, $\omega = 2\,\pi\nu$ Kreisfrequenz). Die Größen γ und $\mathfrak{z}$ werden durch die Gleichungen

$$\gamma^2 = (G_L + j\omega C_L)\,(R_L + j\omega L_L) \tag{13}$$

$$\mathfrak{z}^2 = \frac{R_L + j\omega L_L}{G_L + j\omega C_L} \tag{14}$$

¹) Näheres hierzu siehe Vilbig[24], Feldkeller l. c.

definiert. Die Gleichungen (10) und (11) drücken die Tatsache aus, daß die Wellenverteilung auf der Leitung aus der Summe zweier in entgegengesetzter Richtung verlaufender Wellenzüge resultiert. Der eine Wellenzug ist z. B. beim Abtastverfahren durch den am einen Leitungsende befindlichen Sender, der zweite durch die Reflexion des ersten am jenseitigen Leitungsende hervorgerufen. Sorgt man dafür, daß die reflektierte Welle nicht vorliegt, indem man sich etwa eine unendlich lange Leitung vorstellt, d. h. ist u_1 oder u_2 gleich Null, so ist das Verhältnis von Spannung U zu Strom J an jeder Stelle der Leitung gleich $\mathfrak{z}$. Dies bedeutet, daß man ein unendlich langes Leitungsstück durch einen Widerstand $\mathfrak{z}$ ersetzen kann. Der für eine Leitung charakteristische „Wellenwiderstand" $\mathfrak{z}$ hat also die Eigenschaft, eine Leitung reflexionsfrei abzuschließen. $\gamma = \beta + j\,\alpha$ wird als Fortpflanzungskonstante, β als Dämpfungskonstante und α als Winkelmaß bezeichnet. β ist gemäß dem Gesetz des Verlaufes nur einer Welle

$$U = u_1 e^{-\gamma x} = u_1 e^{-\beta x} (\cos \alpha\, x - j \sin \alpha\, x)$$

der Exponent der e-Funktion, nach der die Amplitude abnimmt. α charakterisiert die Phasenlage, da die Phasenverschiebung im Punkt x verglichen mit $x = 0$ gleich $\alpha\, x$ ist. Da nach einem bekannten Prinzip der Elektrodynamik $\sqrt{L_L C_L} = 1/c$ ($c = 3.10^{10}$ cm/sec) für Leitungen mit dem Dielektrikum Luft ist und sich α nach Gleichung (13) für solche Leitungen $(R \approx O, G \approx O)$ zu $\omega \sqrt{L_L C_L}$ ergibt, folgt

$$\alpha = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{15}$$

Bezeichnen wir den die Meßleitung abschließenden Widerstand mit $\mathfrak{R}$ und sind u_e bzw. u_e' die Amplituden der auf $\mathfrak{R}$ auftreffenden und reflektierten Welle, so folgt aus den Gleichungen (10) und (11)

$$\frac{U_e}{J_e} = \mathfrak{R}_e = \frac{u_e + u_e'}{\dfrac{u_e}{\mathfrak{z}} - \dfrac{u_e'}{\mathfrak{z}}}, \tag{16}$$

wenn das Längenmaß vom Abschluß an gerechnet wird ($x_e = O$!) Es ist sinnvoll, als Reflexionskoeffizient von $\mathfrak{R}$ den Wert

$$p = \frac{u_e'}{u_e} \tag{17}$$

einzuführen. Dies führt zu den Beziehungen

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{z}\frac{1 + p}{1 - p} \qquad\qquad p = \frac{\mathfrak{R} - \mathfrak{z}}{\mathfrak{R} + \mathfrak{z}}. \tag{18}$$

Analog hierzu kann man den Eingangswiderstand $\mathfrak{R}_a$ einer Leitung der Länge l, die mit einem komplexen Widerstand $\mathfrak{R}$ belastet ist, berechnen. Sind u_a und u_a' die Amplituden der auf $\mathfrak{R}$ zu- und von $\mathfrak{R}$ weglaufenden Wellen am Leitungsumfang, so ist offenbar

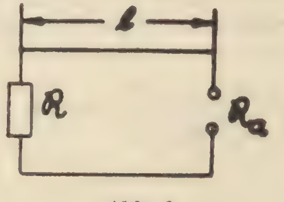


Abb. 6

$$\mathfrak{R}_a = \frac{u_a + u_a'}{u_a - u_a'}\,\mathfrak{z}. \tag{19}$$

Da aber $u_a = u_e e^{\gamma l}$ und $u'_a = u'_e e^{-\gamma l}$ gilt, folgt weiter

$$\mathfrak{R}_a = \frac{1 + p e^{-2\gamma l}}{1 - p e^{-2\gamma l}} \mathfrak{z}. \tag{20}$$

Bei Meßleitungen sind R_L und G_L meist vernachlässigbar klein, so daß

$$\mathfrak{z} = Z = \sqrt{\frac{L_L}{C_L}} \tag{21}$$

eine reelle Größe und $\beta = 0$ wird. Dann gilt $\gamma \approx 2\pi \frac{l}{\lambda} j$ und somit

$$\mathfrak{R}_a = Z \frac{1 + p e^{-j4\pi \frac{l}{\lambda}}}{1 - p e^{-j4\pi \frac{l}{\lambda}}}. \tag{22}$$

Ist $\mathfrak{R} = 0$ (Kurzschluß), so p nach Gleichung (18) gleich -1 und somit

$$\mathfrak{R}_K = \mathfrak{z} \frac{1 - e^{-2\gamma l}}{1 + e^{-2\gamma l}} = \mathfrak{z} \operatorname{Ctg} \gamma l. \tag{23}$$

Ist $\mathfrak{R} = \infty$ (Leerlauffall), so folgt entsprechend

$$\mathfrak{R}_L = \mathfrak{z} \operatorname{Tg} \gamma l. \tag{24}$$

Die Kombination der beiden letzten Gleichungen ergibt die wichtigen Beziehungen

$$\mathfrak{z} = \sqrt{\mathfrak{R}_L \cdot \mathfrak{R}_K} \tag{25}$$

$$\operatorname{Tg} \gamma l = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}_L}{\mathfrak{R}_K}}. \tag{26}$$

Bezeichnen wir Betrag und Phase des Reflexionskoeffizienten p mit ρ und $-\varphi$, so folgt aus Gleichung (18) für reelles $\mathfrak{z} = Z$ (verlustfreie Meßleitung!)

$$\frac{\mathfrak{R}}{Z} = \frac{1 + \rho e^{-j\varphi}}{1 - \rho e^{-j\varphi}} \tag{27}$$

und hieraus nach kurzer Rechnung

$$\frac{\mathfrak{R}}{Z} = \frac{1 - \rho^2 - j\, 2\rho \sin\varphi}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos\varphi}. \tag{28}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung ist es leicht möglich, die beiden Komponenten von $\mathfrak{R}$ aus ρ und φ zu ermitteln. Der Zusammenhang von ρ und Wellenverhältnis W wurde bereits bei der Schilderung des Abtastverfahrens besprochen. φ ist ebenfalls aus der Messung leicht zu entnehmen (siehe hierzu z. B. den Anfang von Kapitel V!). Die Bestimmung von $\mathfrak{R}$ aus ρ und φ gestaltet sich besonders einfach mit Hilfe von graphischen Hilfstafeln. Bekanntlich ergibt die konforme Abbildung der Koordinatenebene durch die komplexe Funktion $z = \frac{1+\mathfrak{w}}{1-\mathfrak{w}}$ ein System zweier orthogonaler Kreisscharen. Versieht man diese Scharen mit ρ- bzw. φ-Parametern, so erhält man mit den Koordinaten des Schnittes der durch die Messung gegebenen ρ- und φ-Kreise sofort Real- und Imaginärteil von $\frac{\mathfrak{R}}{Z}$. Dieses Kreisdiagramm wurde von O. SCHMIDT[11] eingeführt und ist seitdem vielfach in Gebrauch. Es ist allerdings nicht möglich, den ρ- und φ-Bereich einerseits so fein zu unterteilen, wie es die angestrebte Genauigkeit erfordert und andererseits so weit zu spannen, daß praktisch alle vorkommenden Fälle, wie sie z. B. durch sehr gering leitfähige Proben gegeben sind, erfaßt werden.

Die vier im folgenden gebrachten Kapitel sind so geschrieben, daß jedes für sich gelesen werden kann. Die in ihnen gebrauchten Bezeichnungen sind immer identisch mit den in dieser Einleitung gebrauchten. Die experimentelle und theoretische Entwicklung, die in der vorliegenden Arbeit ihren Niederschlag fand, wurde in den Jahren 1943 bis 1945 am Frankfurter Kaiser-Wilhelm-Institut für Biophysik unter Leitung von Herrn Professor Dr. B. Rajewsky durchgeführt. Es wurden mit der in Kapitel III beschriebenen Anordnung einige tausend verschiedene, von der Industrie gelieferte Materialien untersucht und dabei die geschilderten Methoden erprobt. Mit der Durchführung dieser Arbeiten wurde der Verfasser von Herrn Professor Rajewsky im Sommer 1943 betraut. Herr Professor Rajewsky brachte der Entwicklung der Meßtechnik sein besonderes Interesse entgegen und hat mir jede apparative Hilfe trotz kriegsbedingter Schwierigkeiten großzügig zur Verfügung gestellt. Dieser Tatsache und vielen positiven Anregungen meines verehrten Lehrers ist das erreichte Resultat zu verdanken. Ich schulde Herrn Prof. Rajewsky dafür meinen ganz besonderen Dank.

LITERATUR.

[1] Eine ausführliche Darstellung der Arbeiten der genannten Autoren findet sich in den von RAJEWSKY herausgegebenen Ergebnissen der biophysikalischen Forschung, 1. Band (Ultrakurzwellen), erschienen bei Thieme, Leipzig 1938. In ihm finden sich eingehende Arbeiten von DÄNZER, HOLLMANN, RAJEWSKY, SCHAEFER und SCHLIEPHAKE sowie umfangreiche Literaturangaben.

[2] SCHAEFER H. und SCHWAN H.: Zur Frage der selektiven Erhitzung kleiner Teilchen im Ultrakurzwellen-Kondensatorfeld. Annalen d. Physik, Bd. **43**, 99, [1943].
SCHAEFER H. und SCHWAN H.: Zur Frage der selektiven Erhitzung von Einzelzellen (Bakterien) im biologischen Gewebe mittels Ultrakurzwellen-Durchflutung. [1943], bisher unveröffentlicht.

[3] GSELL G.: Absorptionsmessungen an biologischen Flüssigkeiten (Blut) im Bereich von 50 bis 100 cm Wellenlänge. Phys. Zeitschr., **43**. Jahrg. 101, [1942].

[4] SCHWAN H.: Dielektrisches Verhalten inhomogener Stoffe, insbesondere biologischer Körper bei verschiedenen Temperaturen und verschiedenen Frequenzen. Annalen d. Physik, Bd. **40**, 509, [1941].

[5] DRUDE P.: Wiedemanns Annalen **61**, 466, [1897].

[6] ZAHN H.: Ein neues Meßprinzip zur Untersuchung der DK gutleitender Substanzen. Annalen d. Physik, Bd. **80**, 182, [1926].

[7] HELLMANN H.: Eine Absolutmethode zur Messung der Dielektrizitätskonstanten von Elektrolytlösungen bei Hochfrequenz. Annalen d. Physik, Bd. **19**, 623, [1934].

[8] PRACHER A.: Eine neue absolute Methode zur Bestimmung der hochfrequenten Leitfähigkeit von wässrigen Elektrolyten. HF-Technik u. Elektroakustik, Bd. **59**, 157, [1942].

[9] KNOL K. S. und STRUTT M. J. O.: Über ein Verfahren zur Messung komplexer Leitwerte im Dezimeterwellengebiet. Physica IX, 577, [1942].

[10] ROOSENSTEIN H. O.: Die Fortleitung hochfrequenter elektrischer Schwingungsenergie. Jahrb. d. drahtl. Tel. u. Tel., **36**, 81 und 121, [1930].

[11] SCHMIDT O.: Das Paralleldrahtsystem als Meßinstrument in der Kurzwellentechnik. HF-Technik u. Elektroakustik, Bd. **41**, 2, [1933].

[12] DAHME A.: Dämpfungsmessungen an Kabeln im Bereiche der Meterwellen. HF-Technik u. Elektroakustik, Bd. **52**, 1, [1938].

[13] KÜSTER W.: Über Messungen der dielektrischen Eigenschaften keramischer Isolierstoffe bei Zentimeterwellen. HF-Technik u. Elektroakustik, Bd. **59**, 129, [1942].

[14] DITL A.: Beitrag zur Messung der Übertragungseigenschaften konzentrischer Leitungen im Dezimeterwellengebiet. HF-Technik u. Elektroakustik, Bd. **60**, 2, [1942].

[15] KAUFMANN H.: HF-Technik u. Elektroakustik, Bd. **55**, 37, [1940]; Telegr. Techn. **29**, 325, [1940].

[16] BRÜCK L.: Widerstandsmessung bei Dezimeterwellen. Telefunken-Röhre, 60, [1943].

[17] WEISSFLOCH A.: Ein Transformationssatz über verlustlose Vierpole und seine Anwendung auf die experimentelle Untersuchung von Dezimeter- und Zentimeterwellen-Schaltungen. HF-Technik u. Elektroakustik, Bd. **60**, 67, [1942].

[18] MEINKE H.: Stoßfreie Bauelemente konzentrischer Leitungen bei hohen Frequenzen. HF-Technik u. Elektroakustik, Bd. **61**, 145, [1943].

[19] FELDKELLER R.: Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik, 2. Auflage, Leipzig [1942].

[20] KADEN H.: Die Dämpfung und Laufzeit von Breitbandkabeln. Archiv f. Elektrotechnik, Bd. **30**, 11, [1936].

[21] SOMMER F.: Über die Auswertung von Leerlauf- und Kurzschlußmessungen an homogenen Leitungen. ENT, **16**, 127, [1939].

[22] UNTERMANN G.: Messung der elektrischen und magnetischen Konstanten von Kunststoffen bei Ultra-Hochfrequenz in der konzentrischen Meßleitung. Frankfurter Dissertation, [1944].

[23] BECKER R.: Theorie der Elektrizität. Bd. **1**, 11. Auflage, Teubner, Leipzig [1941].

[24] VILBIG F.: Lehrbuch der HF-Technik. 2. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig [1939].

KAPITEL II.

THEORETISCHE BEHANDLUNG DER RESONANZVERFAHREN ZUR BESTIMMUNG KOMPLEXER WIDERSTÄNDE UND MATERIALIEN BEI DEZIMETERWELLEN.

1. Einleitung.

Meßmethoden zur Bestimmung komplexer Widerstände, die auf den Resonanzeigenschaften von Schwingkreisen beruhen, sind im mittleren Frequenzgebiet bekanntlich vorwiegend in Gebrauch. Im Dezimeterwellenbereich dagegen ist dies nicht der Fall. Die meisten Arbeiten, die sich mit der Meßtechnik mit Hilfe von Lecherleitungen in offener und geschlossener Ausführung beschäftigen, setzen keine Abstimmung der Leitung auf Resonanz voraus. Das Studium der Resonanzkurve wird hierbei ersetzt durch eine Aufnahme der Spannungsverteilung längs der Leitung[1]. Hierbei ist insbesondere die Untersuchung des Minimums unerläßlich. Die Ausmessung des Minimums ist nun zweifellos mit wesentlich größeren Fehlermöglichkeiten behaftet als die bei einer Resonanzmethode an ihre Stelle tretende Messung der Resonanzkurvenhöhe und -breite. Dies gilt umso mehr, je geringer dämpfend der zu untersuchende Widerstand wirkt. Der Hauptgrund für die Entwicklung des jetzt üblichen „Abtastverfahrens" ist in seiner einfachen mathematischen Grundlage zu erblicken. Es liegen mehrere Untersuchungen vor, die das Resonanzverfahren unter einschränkenden Voraussetzungen, z. B. der kleiner Kurvenbreite, behandeln[2]. In der vorliegenden Arbeit wird eine umfassende theoretische Untersuchung durchgeführt mit dem Ziel, eine Form des Resonanzverfahrens zu finden, für die sich besonders einfache, allgemein gültige Beziehungen ergeben. Einleitend soll dargelegt werden, welches die Grenzen der oben erwähnten Resonanzmethoden auf quasistationärer Grundlage sind.

2. Grenzen der Anwendbarkeit quasistationärer Resonanzmethoden.

Es sei der meist interessierende Fall des parallelgedämpften Kreises behandelt. Solange quasistationäre Verhältnisse vorliegen, gilt für die abgebildete Schaltung die Beziehung

$$E^2 = \frac{V^2}{\omega^2 \frac{L^2}{R^2} + (\omega^2 L C - 1)^2}, \qquad (1)$$

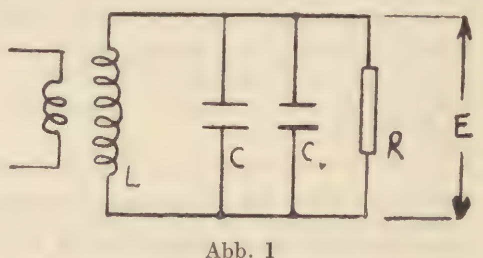


Abb. 1

wenn durch induktive Erregung eine Spannung V in L eingespeist wird. Die Beziehung (1) folgt leicht aus der Proportion $V : E = |R_L + R_C| : |R_C|$, wenn mit R_L und R_C die komplexen Widerstände von L und dem mit R belasteten C bezeichnet werden. Wird die Resonanz durch C-Variation erzielt, so gilt im Resonanzfall

$$\omega^2 L C_0 = 1 \qquad (1a)$$

und

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{R \omega C_0}, \qquad (1b)$$

[1] Siehe z. B. die Arbeiten von G. Schmidt, Hochfr. u. Elektroakustik **41**, S. 2—16, [1933]; K. S. Knol u. J. O. Strutt, Physica IX, Nr. **6**, S. 577—90, [1942].

[2] Z. B. H. Brück, Telefunken-ZS, [1943].

worin ΔC die C-Veränderung angibt, die erforderlich ist, um E^2 auf den halben Resonanzwert abfallen zu lassen. Mit Hilfe der Gleichungen (1a) und (1b) lassen sich C und R bestimmen, wenn der festen Kapazität C eine variable Kapazität C_V parallel geschaltet wird. Bei kleiner Wellenlänge wird man zwecks Herstellung quasistationärer Verhältnisse die Zuleitungen zur untersuchenden C-R-Kombination möglichst klein gestalten. Es ist aus diesem Grunde vorteilhaft, C_V fortfallen zu lassen und die Resonanz durch ω-Variation einzustellen. Wie Differentiation des Nenners von Gleichung (1) zeigt, gilt in diesem Falle die Resonanzbedingung

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{L}{2 R^2 C}}. \tag{1c}$$

Die ω_0 zugeordnete maximale Spannung E hat den Wert

$$E_0 = V \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{R}{\sqrt{1 - L/4 R^2 C}}.$$

Sie sinkt auf den 0,7fachen Wert, wenn

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2 \omega_0} \cdot \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{R \omega_0 C} \sqrt{\frac{1 - L/4 R^2 C}{1 - L/2 R^2 C}} \tag{1d}$$

gilt. Darin sind ω_1 und ω_2 die beiden ω_0 benachbarten Kreisfrequenzen, für die E^2 den halben Resonanzwert annimmt. In den Beziehungen (1c) und (1d) ist in praktisch allen Fällen $L \ll 2 R^2 C$. Es genügt daher zur Abschätzung von R und C die Verwendung der Formeln ohne die Berücksichtigung der Glieder $L/2 R^2 C$ und $L/4 R^2 C$. Mit den so ermittelten Werten geht man dann in die Wurzelglieder ein und erhält durch nochmalige Anwendung der vollständigen Beziehungen (1c) und (1d) R und C mit ausreichender Genauigkeit.

Die angegebenen Beziehungen haben, wie gesagt, nur bei quasistationären Verhältnissen Gültigkeit. Bei mehr und mehr ansteigender Frequenz erfahren sie zunehmende Korrekturen. Dies sei im folgenden am Beispiel des verlustlosen Kreises erörtert. Der Kreis sei gemäß der Abbildung beschaffen, d. h. an eine sozusagen punktförmig konzentriert vorgegebene Kapazität sei als Selbstinduktion ein Drahtbügel der Länge 1 angeschlossen. Das Gebilde ist bekanntlich[1] in Resonanz, wenn

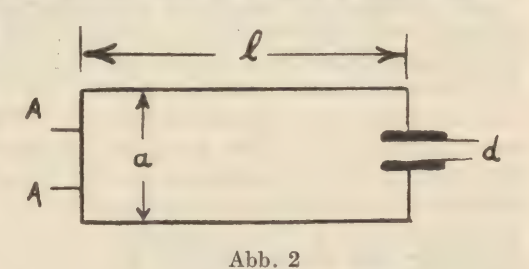


Abb. 2

$$\operatorname{tg} 2 \pi \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{Z \omega C} \tag{1e}$$

gilt (Z Wellenwiderstand des Drahtbügels!). Sind L_L und C_L Selbstinduktion und Kapazität pro Längeneinheit des Bügels, so gilt[2]

$$\frac{2 \pi}{\lambda} l = \omega \sqrt{L_L C_L}\, l = \frac{\omega L_L l}{\sqrt{\frac{L_L}{C_L}}} = \frac{\omega L}{Z}$$

und somit

$$\operatorname{tg} \frac{\omega L}{Z} = \frac{1}{Z \omega C} \tag{1f}$$

[1] Siehe z. B. in der klassischen Arbeit über DRUDES 2. Methode, Wiedemanns Annalen **61**, S. 466, [1897].

[2] U. a. ersichtlich in F. VILBIG, Lehrbuch der HF-Technik, Allgemeine Verlagsgesellschaft Leipzig, S. 108, [1939].

Die Beziehung (1f) umfaßt die bekannte Thomsonformel $\omega^2 L C = 1$. Diese erhält man, wenn der tg-Ausdruck durch sein Argument ersetzt werden darf, bzw. wenn ωL klein gegen Z bzw. $2 \pi l$ klein gegen λ ist. Wird die Kapazität C durch Einbringen eines Dielektrikums in den Wert C_m übergeführt, so liefert der Quotient der dann gültigen Gleichung mit (1f) den Wert

$$\frac{C}{C_m} = \frac{\omega_m}{\omega} \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega_m L}{Z}}{\operatorname{tg} \frac{\omega L}{Z}}.$$

In dem uns hier interessierenden Gebiet des Überganges vom quasistationären zum nichtquasistationären Zustand dürfen die tg-Werte nach den zweiten Gliedern ihrer Reihe abgebrochen werden:

$$\frac{C}{C_m} = \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2 \frac{1 + \frac{1}{3}\left(\omega_m \frac{L}{Z}\right)^2}{1 + \frac{1}{3}\left(\omega \frac{L}{Z}\right)^2}.$$

Wegen der Kleinheit der $\frac{1}{3}$-Glieder ist dies identisch mit

$$\frac{C_m}{C} = \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^2 \left[1 + 13{,}2\, l^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2_m}\right)\right]. \qquad \text{(1g)}$$

Man erkennt hieraus: Der Kreis arbeitet umso länger quasistationär, je geringer λ von λ_m bzw. C von C_m abweicht und je geringer l ist. Bei Kapazitätsbestimmungen hängen also die Grenzen des quasistationären Zustandes von dem Verhältnis der Kapazitäten, der Länge der Selbstinduktion und den durch sie und die absolute Größe der Kapazitäten bestimmten Werten λ und λ_m ab.

Im folgenden soll an Hand von Meßergebnissen gezeigt werden, wie Untersuchungen nach Gleichung (1g) verlaufen. Der L-Bügel bestand im vorliegenden Fall aus 3 mm starkem Messing, der Abstand a betrug 4 cm. l war durch Einfügen mehrerer Zwischenstücke zwischen 7 und 13 cm veränderlich. An den Anschlüssen AA war der Kopf eines Röhrenvoltmeters (*UTKT* der Firma P. T. E.) zur Resonanzanzeige aufgesteckt. Der Kreis war induktiv an den *H.F.*-Generator (*SLD* der Firma P. T. E.) lose angekoppelt. Bei den kürzeren Wellenlängen erwies es sich überdies als notwendig, zwecks Entkopplung eines durch das Röhrenvoltmeter und die Verbindung AA gegebenen Kreises auf den Meßkreis und zwecks Vermeidung der hierdurch bedingten Bandfilterkurven die Verbindung AA durch aufsteckbare Kurzschlußscheiben geringer induktiv zu gestalten. Der Kondensator bestand aus zwei Kreisplatten von 2 cm Durchmesser, deren Abstand zwischen 2 und 5 mm geändert werden konnte. Die zu untersuchenden Proben werden zweckmäßig auf denselben Durchmesser von 2 cm gebracht. Für die Kapazität eines solchen Kondensators gilt ohne Dielektrikum nach KOHLRAUSCH

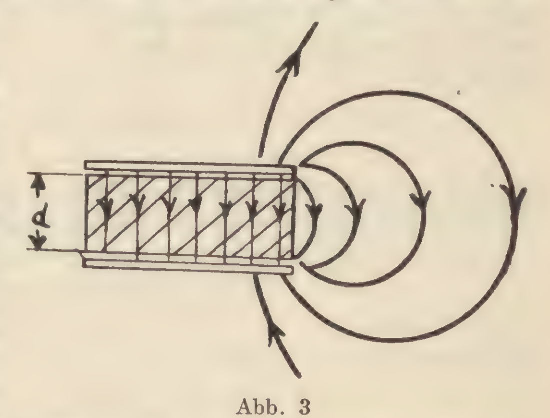


Abb. 3

$$C = \frac{r^2}{4 d} + \frac{r}{4 \pi}\left[\ln\, 16 \pi \frac{r}{d} + 1\right] = C_0 + C_s.$$

Wird das Dielektrikum in der skizzierten Form eingebracht, so multipliziert sich lediglich C_o mit ε, da das Streufeld C_s praktisch unverändert bleibt. Somit wird

$$C_m = \varepsilon \cdot C_o + C_s$$

gültig. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\varepsilon = \frac{C_m}{C} \cdot \left(1 + \frac{C_s}{C_o}\right) - \frac{C_s}{C_o}. \tag{1h}$$

Die Werte von C_s/C_o werden hierin nach der von KOHLRAUSCH angegebenen Formel bestimmt. Sie betragen z. B. für $r = 1$ cm und $d = 2$ mm: 0,42, für $d = 3$ mm: 0,59 und $d = 5$ mm: 0,9. Man erkennt aus diesen Werten, daß man ohne die Erfassung des Streufeldes stark verfälschte *DK*-Werte erhalten würde. In der Tabelle sind einige Meßergebnisse an Trolitulscheiben angegeben. Mit K ist der Korrekturfaktor der eckigen Klammer in Gleichung (1g) bezeichnet. Man erkennt, daß bei allen Wellenlängen die Störung des quasistationären Verhaltens zwischen 5 und 9 % beträgt. Die Schwankung der ε-Werte läßt sich auf eine Ungenauigkeit der Frequenzeichung des verwandten Senders von etwa maximal 5 % zurückführen.

l	d	λ	K	ε
7 cm	2 mm	104 cm	1,05	2,5
	3	88	1,07	2,5
	5	72	1,08	2,6
9	2	117	1,06	2,3
	3	102	1,08	2,4
	5	84	1,08	2,4
11	2	138	1,06	2,3
	3	120	1,07	2,4
	5	98	1,09	2,5
13	2	150	1,07	2,3
	3	132	1,08	2,3
	5	112	1,09	2,4

Aus dem Vorhergesagten ergibt sich, daß es sehr gut möglich ist, mit Mikrokreisen bis zu Wellenlängen von etwa 70 cm herab zu arbeiten. Allerdings ist hierbei eine Erfassung der Störung des quasistationären Zustandes erforderlich. Dies ist bei nichtleitenden Dielektrika, wie gezeigt, leicht möglich. Der Versuch dagegen, die Beziehungen (1c) und (1d) auf leitende Dielektrika zu erweitern, führt auf numerisch kompliziertere Formen. Somit erscheint es nicht zweckmäßig, quasistationäre Resonanzmethoden zur Bestimmung beliebig komplexer Widerstände im Dezimeterwellengebiet anzuwenden. Es soll daher nunmehr auf die nichtquasistationären Resonanzverfahren eingegangen werden.

3. Überblick über die möglichen nichtquasistationären Resonanzverfahren.

Es liege eine Leitung in offener oder geschlossener Ausführung mit überall gleichem Wellenwiderstand vor. Das eine Ende der Leitung wird durch einen verrückbaren Kurzschluß K, mit dessen Hilfe die Leitung zur Resonanz gebracht wird, abgeschlossen. Der zu bestimmende komplexe Widerstand sei am anderen Leitungsende angeschlossen[1]. Der Sender kann dann irgendwo zwischen $\mathfrak{R}$ und K induktiv oder kapazitiv ankoppeln. Die durch ihn eingespeiste Spannung u findet zu beiden Seiten des Senders entsprechend den beiden Leitungsteilen einen beliebig komplexen Widerstand in Richtung

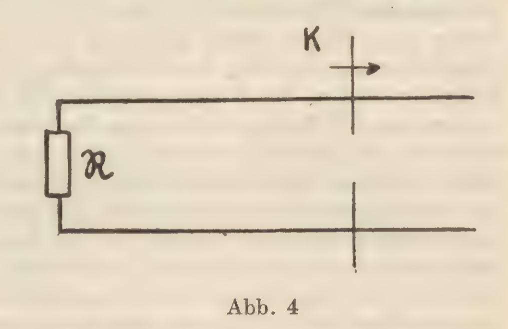


Abb. 4

[1] Der Fall, daß $\mathfrak{R}$ nicht am Leitungsende sitzt, stellt keine Verallgemeinerung der Schaltung 4 dar, da hierbei dem $\mathfrak{R}$ der Abb. 4 durch das weiterführende Leitungsende ein reiner Blindwiderstand $\mathfrak{W}$ parallel geschaltet wird und somit wieder die Schaltung 4 mit einem neuen Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}\mathfrak{W}/\mathfrak{R} + \mathfrak{W}$ vorliegt.

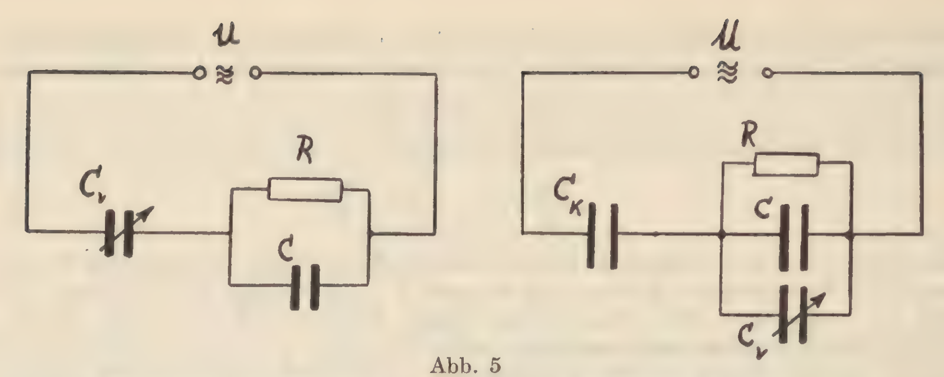


Abb. 5

a) induktive Ersatzschaltung   b) kapazitive Ersatzschaltung

nach $\mathfrak{R}$ und einen rein imaginären Widerstand nach der Kurzschlußbrücke hin vor, wenn die Eigendämpfung der Leitung vernachlässigbar ist. Im Falle induktiver bzw. kapazitiver Ankopplung ergeben sich somit die in Abb. 5 skizzierten Ersatzschaltungen. Bei induktiver Kopplung wird in die Leitung eine Spannung U induziert, für die der durch Verrücken von K variierbare rein imaginäre Leitwert $j\,\omega\,C_v$ und der Eingangswiderstand des anderen Leitungsteiles (durch die R, C-Kombination dargestellt) in Reihe geschaltet vorliegen. Bei kapazitiver Ankopplung sind C_v und die R, C-Kombination parallel geschaltet und die Hochfrequenz-Spannung liegt über der Koppelkapazität C_K an dieser Parallelschaltung. Man ersieht hieraus, daß die kapazitive Kopplung ein (imaginäres) Element C_K mehr enthält und somit eine Untersuchung irgendwelcher Ströme und Spannungen der Schaltung in Abhängigkeit von C_V bei kapazitiver Kopplung schwieriger sein muß als bei induktiver. Aus diesem Grunde wollen wir uns im folgenden auf die Resonanzmethoden mit induktiver Senderankopplung beschränken. Wir werden dabei außerdem voraussetzen, daß die eingekoppelte Spannung U als konstant anzusehen ist, sich also mit C_V nicht ändert. Diese Voraussetzung ist immer dann erfüllt, wenn die Senderankopplung so locker ist, daß Zieherscheinungen nicht auftreten können.

Bei induktiver Senderankopplung lassen sich die in Abb. 6 skizzierten fünf verschiedenen Anordnungen unterscheiden. Im Falle A sind Sender S und Empfänger E an der Kurzschlußbrücke angebracht und werden mit dieser verrückt. Der Empfänger muß bei dieser Anordnung ebenfalls induktiv koppeln, da am Kurzschluß ein Strombauch und Spannungsknoten vorliegt und infolgedessen dort nur eine Strommessung möglich ist. Im Falle B sind Empfänger und Sender feststehend, wobei der Empfänger zwischen R und S angeordnet ist. Da die Spannungsverteilung zwischen $\mathfrak{R}$ und S durch $\mathfrak{R}$ allein bestimmt wird, muß E einen zum an der Stelle S vorliegenden Eintrittsstrom proportionalen Wert messen. Der Proportionalitätsfaktor kann hierbei nicht abhängig sein von der Stellung der Kurzschlußbrücke. Dabei ist es gleichgültig, ob der Empfänger kapazitiv oder induktiv angekoppelt ist. Es genügt daher, den Eingangswiderstand (bzw. dessen reziproken Wert) zu untersuchen, um die Eigenschaften der Resonanzkurve, die durch E bestimmt wird, zu erkennen. Im Falle D ist der Zusammenhang zwischen der durch E ermittelten Größe und dem Strom an der Stelle des Senders wesentlich komplizierter, da er von der Stellung der Kurzschlußbrücke abhängt. Da andererseits die Anordnung D in ihrem Aufbau keinerlei Vorzüge vor der Anordnung B aufweist, sei auf ihre ausführliche mathematische Diskussion verzichtet. Bei der Anordnung C steht der Sender fest, der Empfänger wird mit E verschoben und muß, wie im Falle A, induktiv koppeln. Der Fall E zeigt eine ähnliche Anordnung, nur sind Sender und Empfänger gegenüber Fall C vertauscht. Die Anordnung E ist gegenüber der Anordnung C vor allem dann von Nachteil, wenn die Zuleitung zur Koppelschleife S aus Energiegründen mittels einer Resonanzvorrichtung abgestimmt wird. Denn bei Verschie-

bung von K werden die Fortpflanzungseigenschaften der von S über die Resonanzeinrichtung zum feststehenden Hochfrequenzgenerator führenden Leitungen infolge ihrer sich ändernden Lage eine Abänderung erfahren, die eine beträchtliche Variation des Stromes in S zur Folge haben kann. Die Forderung einer konstanten Erregung der Leitung ist daher schwer zu erfüllen. Bei der Anordnung C können entsprechende Schwierigkeiten nicht auftreten, wenn durch zweckmäßige Verblokkung eines bei E direkt angebrachten Gleichrichters die wegführenden Leitungen frei von Hochfrequenz sind. Außerdem ist auch im Falle E der Zusammenhang zwischen dem Eintrittsstrom an der Stelle S und dem Strom an der Stelle E kompliziert. Daher sei in Anbetracht der mathematischen Komplizierung und der erwähnten Schwierigkeiten experimenteller Art von einer ausführlichen Behandlung des Falles E abgesehen.

In den folgenden Abschnitten soll nun die ausführliche Behandlung der Resonanzmethoden A, B und C erfolgen.

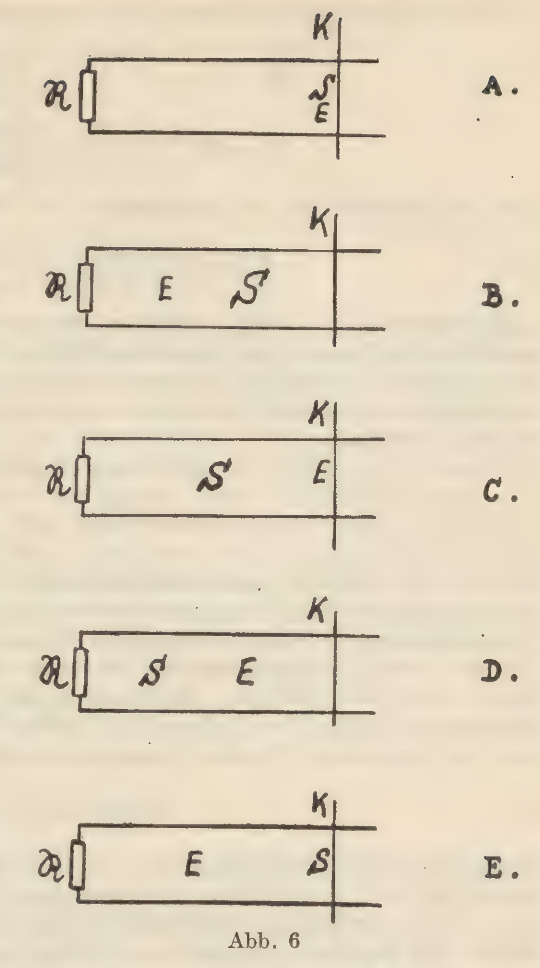


Abb. 6

4. Theorie der Resonanzanordnung, bei der Sender und Empfänger mit der Kurzschlußbrücke verschoben werden (Fall A).

Sind Sender und Empfänger mit der an einem Leitungsende befindlichen Kurzschlußbrücke fest verbunden (Abb. 6, Anordnung A), so ergibt sich folgendes. Bezeichnet l die gesamte Leitungslänge, p den komplexen Spannungsreflexionskoeffizienten des Abschlußwiderstandes $\mathfrak{R}$ und γ die Fortpflanzungskonstante der Leitung, so ist bekanntlich[1]

$$\mathfrak{R}_e = Z\frac{1+pe^{-2\gamma l}}{1-pe^{-2\gamma l}} \tag{4a}$$

der am Ort der Kurzschlußbrücke K vorliegende Eingangswiderstand der Leitung. Wegen der vorausgesetzten vernachlässigbaren Eigendämpfung der Leiter darf $\gamma = j\alpha = j\frac{2\pi}{\lambda}$ gesetzt werden. Wird zudem p in Betrag und Phase gemäß

$$p = \rho\, e^{i\varphi}$$

zerlegt, so geht (4a) über in

$$\mathfrak{R}_e = Z\frac{1+\rho\, e^{j(\varphi-2\alpha l)}}{1-\rho\, e^{j(\varphi-2\alpha l)}}. \tag{4b}$$

[1] Wir verweisen auf H. Vilbig l. c.

Nach Auftrennung des reellen und imaginären Anteils erhält man hieraus

$$\Re_e = Z\,\frac{1-\rho^2 + j\cdot 2\rho\sin(\varphi - 2\alpha l)}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\varphi - 2\alpha l)} \qquad (4\text{c})$$

$$R_e^2 = Z^2\,\frac{(1-\rho^2)^2 + 4\rho^2\sin^2(\varphi - 2\alpha l)}{(1+\rho^2 - 2\rho\cos(\varphi - 2\alpha l))^2}.$$

Dies ist identisch mit der Gleichung

$$R_e^2 = Z^2\,\frac{1+\rho^2 + 2\rho\cos(\varphi - 2\alpha l)}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\varphi - 2\alpha l)}. \qquad (4\text{d})$$

Der Empfänger E zeigt maximalen Strom an, wenn R_e seinen minimalen Wert erreicht. Der Nenner von Gleichung (4d) hat seinen maximalen Wert, wenn cos $(\varphi - 2\alpha l) = -1$ gilt, d. h. wenn $\varphi - 2\alpha l$ ein ungeradzahliges Vielfaches von π ist. Gleichzeitig erreicht der Zähler von (4d) seinen Minimalwert. Die Resonanzbedingung lautet also

$$2\alpha l - \varphi = (2n+1)\,\pi \qquad (4\text{e})$$

$$l = \frac{\lambda\,\pi}{4}\,\varphi + (2n+1)\,\frac{\lambda}{4},$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist[1]. Wegen der Symmetrie der Beziehungen (4c) und (4d) in $\alpha = 2\pi/\lambda = \omega/c$ und l ist es dabei gleichgültig, ob die Resonanz durch Variation von ω bei fester Stellung des Kurzschlusses K oder durch Verändern von l erreicht wird[2]. Experimentell ist die Resonanzeinstellung mittels l-Variation günstiger, da es nicht leicht ist, den Strom in der Koppelschleife S bei ω-Veränderung konstant zu halten. Durch Einsetzen der Bedingung (4e) in Gleichung (4d) erhält man im Resonanzfall für den Eingangswiderstand $\Re_e$ den reellen Wert:

$$R\,(\text{min}) = Z\,\frac{1-\rho}{1+\rho}. \qquad (4\text{f})$$

Bekanntlich tritt der Quotient $(1-\rho)/(1+\rho)$ beim Abtastverfahren als Wellenverhältnis $W = U\,(\text{min})/U\,(\text{max})$ in Erscheinung. Es folgt somit: Der Resonanzwert des Eingangswiderstandes $\Re e$ und damit auch der reziproke Wert des Resonanzstromes im Empfänger sind proportional zu dem Wellenverhältnis W, das bei der Abtastmethode definiert ist. Verfügt man über ein Normal, das die Bestimmung des Proportionalitätsfaktors erlaubt, so kann man also mit Hilfe der Beziehungen (4e) und (4f) Betrag und Phase des Abschlußwiderstandes $\Re$ bestimmen. Wir werden jetzt sehen, daß sich durch Messung der Resonanzkurvenbreite der Besitz dieses $(1-\rho)/(1+\rho)$-Normales erübrigt.

Es sei nach dem l-Wert gefragt, für den der Empfängerstrom um $1/\sqrt{2}$ kleiner als der Resonanzstrom ist. Offenbar ist dies der Fall, wenn R_e den $\sqrt{2}$-fachen Resonanzwert annimmt. Aus Gleichung (4d) und (4f) folgt so die Bedingung

$$\frac{1+\rho^2 + 2\rho\cos}{1+\rho^2 - 2\rho\cos} = 2\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2. \qquad (4\text{g})$$

Das Argument des cos-Gliedes ist dabei gleich $\varphi - 2\alpha l_1$. Darin ist l_1 der eine oder der andere der l-Werte, für die $i^2 = \frac{1}{2}\,i^2_{\text{max}}$ gilt. Wird durch $l_1 - l_0 = \Delta l$ die halbe Breite der Resonanzkurve Δl eingeführt, wobei l_0 der l-Wert der Resonanzleistung ist, so liefert die Anwendung des Additionstheorems der cos-Funktion wegen der Resonanzbedingung (4e)

$$\cos(\varphi - 2\alpha l_1) = \cos(\varphi - 2\alpha l_0 - 2\alpha\,\Delta l) = -\cos 2\alpha\,\Delta l.$$

[1] Diese Bedingung ist identisch mit der Phasenbeziehung, die bei der Abtastmethode benutzt wird. Siehe hierüber z. B. K. S. Knol und J. O. Strutt l. c.

[2] Das Gleiche gilt natürlich auch für die folgenden Betrachtungen des Abschnittes IV.

Es sei nun in Gleichung (4g) statt des cos-Ausdruckes 1 + cos eingeführt und für

$$1 + \cos(\varphi - 2\,\alpha\,l_1) = 1 - \cos 2\,\alpha\,\Delta\,l = 2\sin^2\alpha\,\Delta\,l$$

gesetzt. So folgt die Formel

$$\frac{(1-\rho)^2 + 4\,\rho\sin^2\alpha\,\Delta\,l}{(1+\rho)^2 - 4\,\rho\sin^2\alpha\,\Delta\,l} = 2\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2$$

und hieraus durch Auflösen nach dem sin-Ausdruck

$$2\sin 2\,\pi\frac{\Delta\,l}{\lambda} = \pm\frac{1-\rho^2}{\sqrt{3\,\rho - 2\,\rho^2 + 3\,\rho^3}}. \qquad (4\text{h})$$

Diese Gleichung läßt sich nicht explicit nach ρ auflösen. Man wird sich daher helfen, indem man $\Delta\,l/\lambda$ als Funktion von ρ graphisch darstellt und kann dann aus dieser Darstellung mit Hilfe des experimentell gewonnenen $\Delta\,l/\lambda$-Wertes den zugehörigen ρ-Wert entnehmen. Die Gleichung (4h) zeigt, daß es möglich ist, Absolutmessungen von ρ allein durch Ermittlung von Resonanzkurvenbreiten vorzunehmen. Die beiden Vorzeichen der Gleichung (4h) sind durch die Tatsache bedingt, daß gemäß der Definition $\Delta\,l = l_1 - l_0$ zwei $\Delta\,l$-Werte zu beiden Seiten der Resonanzstelle mit verschiedenen Vorzeichen existieren. Weiter folgt aus Gleichung (4h), daß die Resonanzkurve symmetrische Eigenschaften besitzt, denn die beiden $\Delta\,l$-Werte unterscheiden sich nur in den Vorzeichen, nicht aber im Betrag.

Für ρ-Werte, die sich nicht stark von 1 unterscheiden, d. h. bei kleiner Dämpfung durch $\mathfrak{R}$, darf für $1/\rho + \rho$ in erster Näherung 2 gesetzt werden ($\rho = 0{,}8$ z. B. bedingt nur 2% Fehler!). Damit folgt für den Nenner die Beziehung (4h)

$$\sqrt{3\,\rho - 2\,\rho^2 + 3\,\rho^3} = \rho\sqrt{3\,(1/\rho + \rho) - 2} \approx \rho\sqrt{6-2} = 2\,\rho$$

und somit

$$\sin 2\pi\frac{\Delta\ l}{\lambda} = \frac{1-\rho^2}{4\,\rho}. \qquad (4\text{i})$$

Da $1/\rho + \rho$ in Wirklichkeit immer größer als 2 ist, liefert die vorerwähnte Beziehung bei gegebenem ρ zu große $\Delta\,l/\lambda$-Werte. Für nicht zu kleines ρ kann weiter der sin-Ausdruck durch sein Argument ersetzt werden. Der hierbei entstehende Fehler hat entgegengesetztes Vorzeichen wie der durch die ρ-Operation bedingte, hebt diesen also zum Teil auf. Der Fehler der Formel

$$2\,\pi\frac{\Delta\,l}{\lambda} = \frac{1-\rho^2}{4\,\rho} \qquad (4\text{k})$$

ist hiernach also sicher kleiner als der größere der Fehler der Gleichung (4i) oder der Gleichung (4h) ohne sin-Operation. In der Tabelle sind für verschiedene ρ-Werte die $\Delta\,l/\lambda$-Werte von Gleichung (4h) und (4k) angegeben. Man erkennt, daß die Gleichung (4k) bis zu $\rho = 0{,}7$ herab auf wenigstens 3% genau ist. Dementsprechend darf die Gleichung (4k) in allen Fällen benutzt werden, in denen $\Delta\,l < \lambda/40$ gilt.

ρ	$\Delta\,l/\lambda$ (4h)	$\Delta\,l/\lambda$ (4k)
0	—	—
0,1	0,190	0,394
0,2	0,113	0,191
0,3	0,085	0,121
0,4	0,0665	0,084
0,5	0,0520	0,0598
0,6	0,0392	0,0424
0,7	0,0278	0,0290
0,8	0,0176	0,0179
0,9	0,0084	0,0084
1	0	0

Wie aus Gleichung (4d) zu entnehmen ist, kann R_e für $\rho < 1$ die Werte Null und Unendlich nicht annehmen. Infolgedessen kann der Minimalwert des Stromes, der nach Gleichung (4d) offenbar gegeben ist, wenn $\varphi - 2\,\alpha\,l = 2\,n\,\pi$ gilt[1], niemals gleich Null sein. Es ist nun von Interesse, den Quotienten des Minimal- zum Maximalstrom zu bestimmen. Die Antiresonanzbedingung $\varphi = 2\,\alpha\,l = 2\,n\,\pi$ bedingt

[1] Der Vergleich dieser Antiresonanzbedingung mit der Resonanzbedingung (4e) zeigt, daß sich die Minimal- und Maximalwerte des Empfängerstromes in $\lambda/4$-Abstand befinden.

$$R\,(\max) = Z\,\frac{1+\rho}{1-\rho}. \tag{4l}$$

Der Quotient der Beziehungen (4f) und (4l) liefert

$$\frac{i\,(\min)}{i\,(\max)} = \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2. \tag{4m}$$

Es ergibt sich somit die folgende Situation: Die bei Anwendung der diskutierten Resonanzmethode sich ergebende Abhängigkeit des Empfängerstromes von der Abstimmung ist periodisch. Sie gestattet die Bestimmung von ρ sowohl aus der Breite der Resonanzkurve als auch aus dem Verhältnis $i\,(\min):i\,(\max)$. Dieses Letztere ist gleich dem Quadrat des Wertes, den das Abtastverfahren liefert. Aus dem Gesagten folgt weiter: Die Messung des Halbwertes von i_0^2 ist nur solange möglich, wie

$$\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^4 > 2 \text{ bzw. } \rho > 0{,}086 \tag{4n}$$

gilt. Bei kleinen ρ-Werten wird man daher wie beim Abtastverfahren vorgehen und den Quotienten $i\,(\min):i\,(\max)$ bestimmen, bei größeren ρ-Werten dagegen ist die Ausmessung der Resonanzkurve zweckmäßiger, da dann das Minimum klein ist und seine Bestimmung demgemäß zunehmend schwieriger wird. Damit ist die weitverbreitete Ansicht, daß das Resonanzverfahren vorwiegend für wellenwiderstandsferne und das Abtastverfahren für wellenwiderstandsnähere Widerstände brauchbar ist, widerlegt. Beide Verfahren sind vielmehr weitgehend gleichwertig. Sie gestatten die Bestimmung des Betrages des Reflexionskoeffizienten von $\mathfrak{R}$ sowohl durch Bestimmung des Quotienten aus einer Minimal- und Maximalablesung als auch durch Ausmessung einer Kurvenbreite. Das Quotientenverfahren ist bei der Resonanz- und Abtastmethode vorwiegend für die wellenwiderstandsähnlichen Widerstände geeignet, das Ausmessen der Kurvenbreite empfiehlt sich bei den wellenwiderstandsfernen Abschlußwerten von $\mathfrak{R}$. Bei dem letzteren Verfahren für stark wellenwiderstandsungleiche $\mathfrak{R}$-Werte differenziert sich nun allerdings der Gebrauchswert der Methoden. Das Resonanzverfahren ist hier der Abtastmethode stark überlegen, da

1. die Minima-Untersuchung des Abtastverfahrens in eine Maximumuntersuchung übergeht. Infolgedessen ist eine weniger große Empfindlichkeit des Empfängers notwendig und die Störanfälligkeit desselben geringer. Dieser wesentliche Vorteil ist umso größer, je mehr $\mathfrak{R}$ vom Wellenwiderstand abweicht.

2. beim Resonanzverfahren die Meßleitung sich stärker als bei der Abtastmethode, bei der die Leitung im allgemeinen nicht in Resonanz ist, erregt und hierdurch ein weniger empfindlicher Empfänger notwendig ist. Viele Anordnungen, die dem Verfasser bekannt wurden und nach dem Abtastverfahren arbeiten, setzen sich durch Abstimmungsmittel, die an der Leitung angebracht sind, in den Besitz der Vorteile, die durch den Resonanzzustand gegeben sind. Solche Anordnungen verbinden die Mittel der Resonanzmethode mit denen des Abtastverfahrens, stellen daher komplizierte Aggregate dar, ohne alle Vorteile der Resonanzmethode aufzuweisen.

3. bei sehr geringen Dämpfungen die Bestimmung der Kurvenbreite wegen ihrer geringen Größe bei beiden Verfahren durch Meßfehler beeinflußt wird. Gerade in solchen Fällen ist das Resonanzverfahren, das auf der Gleichung (4f) beruht und mit der Bestimmung des Maximums der Resonanzkurve auskommt, wegen des besonders großen Maximumwertes einfacher und genauer.

4. Bei der Resonanzanordnung brauchen konzentrische Leitungen nicht geschlitzt zu werden. Die mit der exakten Führung des Abtastorganes verbundenen Schwierigkeiten und, damit zusammenhängend, der vor allem bei langen Leitungen erforderliche Aufwand an Halterungen sind wesentlich geringer.

Der Nachteil des diskutierten Resonanzverfahrens ist darin zu erblicken, daß eine direkte Einwirkung des Senders auf den Empfänger schwer zu vermeiden ist. Sie kann verhindert werden etwa durch eine Anordnung, wie sie nebenstehend für eine Leitung in offener Bauweise skizziert ist. Die Sender- und Empfängerkoppelschleifen SS und EE kreuzen sich unter 90^0 und bilden mit der durch die Drähte einer Doppeldrahtleitung LL bestimmten Ebene einen Winkel von 45^0. Eine andere Möglichkeit besteht darin, Sender und Empfänger zu trennen und den Empfänger in $\lambda/2$ Entfernung vom Kurzschluß so anzubringen, daß er sich in gleicher Weise wie dieser bewegt. Die diskutierte Resonanzmethode hat noch einen anderen Nachteil: Zur Aussiebung von Oberwellen wird die Zuleitung vom Sender zur Erregerspule S zweckmäßig abgestimmt. Wird nun die Kurzschlußbrücke mit der Spule S verschoben, so wird durch Änderung der Lage der Energieleitung die Abstimmung gestört und somit die Forderung konstanter Erregung der Leitung verletzt. Es sollen daher in den folgenden Abschnitten V und VI die Resonanzverfahren erörtert werden, bei denen die Spule S feststeht und vom Empfänger E räumlich getrennt angeordnet ist.

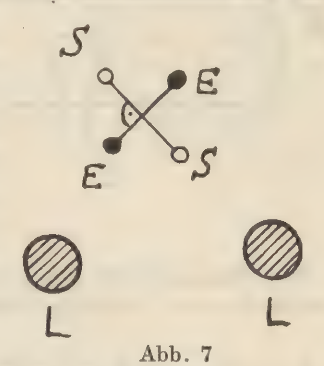


Abb. 7

Die Gleichungen (4f) und (4l) bestimmen R_e für den Fall der Abstimmung auf Resonanz und im Antiresonanzfall. Es ist außerdem von Interesse, R_e zu berechnen, wenn $\varphi - 2\alpha l = (2n + \frac{1}{2})\pi$ gilt, d. h. wenn um $\lambda/8$ gegen den Resonanzfall verstimmt wird. Hierfür folgt aus Gleichung (4c) wegen $\sin(\varphi - 2\alpha l) = 1$ und $\cos(\varphi - 2\alpha l) = 0$

$$R\left(l_0 + \frac{\lambda}{8}\right) = Z. \tag{4o}$$

Dieser Wert ist das geometrische Mittel der bei Resonanz und Antiresonanz vorliegenden Werte. Der Wert $1 - \rho/1 + \rho$ läßt sich daher aus den Stromwerten im Resonanzfall, Antiresonanzfall und dem dazu um $\lambda/8$ verstimmten Zustand auf drei verschiedene Weisen bestimmen. Es gilt

$$\frac{1-\rho}{1+\rho} = \sqrt{\frac{i\,(\min)}{i\,(\max)}} = \frac{i\,(\min)}{i\,(\lambda/8)} = \frac{i\,(\lambda/8)}{i\,(\max)}. \tag{4p}$$

Welche der drei Formen am zweckmäßigsten ist, muß von den jeweils vorliegenden i-Werten abhängig gemacht werden. Bei kleinem Minimum z. B. wird die dritte Form, bei sehr geringer Welligkeit die erste vorzuziehen sein.

5. Die Resonanzanordnung mit feststehender Senderankopplung und festem Empfänger, letzterer zwischen Sender und Abschlußwiderstand (Fall B).

Befinden sich Senderankopplung und Empfänger am gleichen Ort, so mißt der Empfänger den Eingangsstrom. In jedem Falle wird die Strom- und Spannungsverteilung zwischen $\mathfrak{R}$ und S bis auf einen reellen Proportionalitätsfaktor bekanntlich allein durch $\mathfrak{R}$ bestimmt, wenn die Frequenz konstant bleibt. Beschränken wir uns daher im folgenden auf den Fall, daß die Resonanzabstimmung durch Längenvariation der Leitung erfolgt, so mißt (l_e ist konstant!) der Empfänger einen zum Eingangsstrom und damit auch zum Leitwert $1/\mathfrak{R}_e$ proportionalen Wert, wenn er sich zwischen $\mathfrak{R}$ und S befindet. Aus diesem Grunde genügt die Diskussion des Eingangswiderstandes $\mathfrak{R}_e$, um das Verhalten des Empfängerstromes zu überblicken.

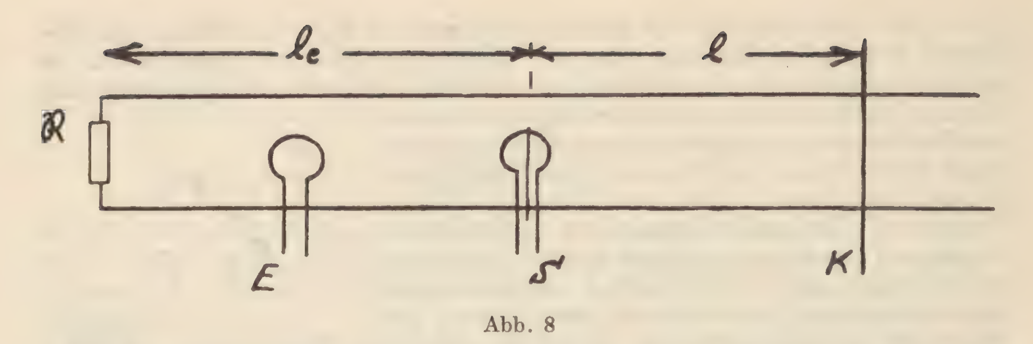


Abb. 8

Der Eingangswiderstand setzt sich hierbei aus den Teilwiderständen, die links und rechts von S vorliegen, additiv zusammen. Analog wie bei der Anordnung A folgt

$$\mathfrak{R}_e = Z\left[\frac{1-\rho^2+j\cdot 2\rho\sin(\varphi-2\alpha l_e)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-2\alpha l_e)}+j\,\mathrm{tg}\,\alpha l\right]$$

$$\mathfrak{R}_e = Z\left[\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-2\alpha l_e)}+j\left(\frac{2\rho\sin(\varphi-2\alpha l_e)}{(1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-2\alpha l_e)}+\mathrm{tg}\,\alpha l\right)\right]. \quad (5a)$$

Da der Realteil dieses Ausdruckes nicht von l abhängig ist, erreicht der Betrag von $\mathfrak{R}_e$ seinen Minimalwert, wenn der imaginäre Bestandteil verschwindet. Die Resonanzbedingung lautet daher

$$\mathrm{tg}\,\alpha l_0 = -\frac{2\rho\sin(\varphi-2\alpha l_e)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-2\alpha l_e)}. \quad (5b)$$

Der dann gegebene Minimalwert von $\mathfrak{R}_e$ ist reell und hat den Wert

$$R\,(\min) = Z\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-2\alpha l_e)}. \quad (5c)$$

Man sieht, daß der Resonanzwiderstand abhängig von der Entfernung des Senders S vom Ende $\mathfrak{R}$ ist. Dies ist verständlich: Koppelt S in einem Maximum der von $\mathfrak{R}$ her diktierten Wellenverteilung an, so wird die Leitung am stärksten erregt, d. h. R (min) muß seinen kleinsten Wert in Abhängigkeit von l_e erreichen. Dies ist der Fall, wenn

$$\varphi-2\alpha l_e = (2n+1)\,\pi \quad (5d)$$

gilt, wie man der Gleichung (5c) entnehmen kann. Wir wollen im folgenden diese Einstellung von S als die Stellung optimaler Kopplung bezeichnen. Für sie gilt

$$R\,(\mathrm{opt.}) = Z\frac{1-\rho}{1+\rho} \quad (5e)$$

und, wie aus Gleichung (5b) folgt, die Resonanzbedingung $\mathrm{tg}\,\alpha l_0 = 0$ bzw.

$$l_0 = n\,\frac{\pi}{2}. \quad (5f)$$

Bei optimaler Kopplung hat also R (min.) den gleichen Wert wie bei der Methode A. Auch für die Gesamtlänge der Leitung $l + l_e$ ergibt sich im Resonanzfall bei optimaler Kopplung der alte Wert, denn die Vereinigung von Gleichung (5d) mit (5f) liefert die mit (4e) identische Beziehung

$$\varphi = 2\alpha l_e - 2\alpha l_0 = (2n+1)\,\pi - 2m\,\pi = [2(n-m)+1]\,\pi.$$

Das Ergebnis (5e) läßt sich auch anschaulich begreifen: Bezeichnet A die Amplitude des durch den Sender in die Leitung eininduzierten und nach beiden Seiten von S fortlaufenden Wellenzuges, so wird infolge der totalen Reflexion von K längs der gesamten Leitung eine Überlagerung dieser beiden Wellenzüge vorliegen. Beide Wellenzüge werden an $\mathfrak{R}$ mit der Amplitude ρA reflektiert und diese reflektierten Wellen an K wiederum total reflektiert. Die Amplitude ρA ist also vierfach vertreten, wobei aber nur zwei Amplituden von Wellen herrühren, die auf $\mathfrak{R}$ zulaufen. Diese letzteren bedingen wiederum vier Amplituden $\rho^2 A$ usw. usw. Im Resonanzfall verstärken sich in den Maxima alle diese Amplituden. Die resultierende maximale Gesamtamplitude hat daher den Wert

$$Ag = 2A + 4\rho A + 4\rho^2 A + \ldots = 2A[1 + 2\rho(1 + \rho + \rho^2 + \ldots)]$$

$$Ag = 2A\left[1 + 2\rho\frac{1}{1-\rho}\right] = 2A\frac{1+\rho}{1-\rho}$$

d. h. sie ist proportional $\frac{1+\rho}{1-\rho}$.[1]

Der durch Gleichung (5a) gegebene Maximalwiderstand ist nicht wie im Fall der Anordnung A endlich, sondern nimmt für $\alpha l = (2n+1)\pi/2$, also für um $\lambda/4$ gegen Resonanz verstimmte Zustände, den Wert ∞ an. Infolgedessen kann eine Minimum-Maximum-Methode zur Bestimmung von ρ bei der Anordnung B nicht angewandt werden. Dies ist hingegen bei $\lambda/8$-Verstimmung gegen Resonanz möglich. Unter der Voraussetzung optimaler Kopplung folgt hierfür aus Gleichung (5a)

$$\mathfrak{R}\left(\frac{\lambda}{8}\right) = Z\left[\frac{1-\rho}{1+\rho} + j\right]$$

$$R\left(\frac{\lambda}{8}\right) = Z\,\frac{\sqrt{2(1+\rho^2)}}{1+\rho}.$$

Durch Quotientenbildung dieser Formel mit Gleichung (5e) erhält man

$$\frac{i\,(\text{opt.})}{i\,(\lambda/8)} = \frac{R\,(\lambda/8)}{R\,(\text{opt.})} = \frac{\sqrt{2(1+\rho^2)}}{1-\rho} = \sqrt{1 + \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2}$$

$$\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2 = \left[\frac{i\,(\text{opt.})}{i\,(\lambda/8)}\right]^2 - 1. \tag{5g}$$

Die Gleichung (5g) gestattet in einfacher Weise die Bestimmung von $w = \frac{1-\rho}{1+\rho}$ aus zwei Amplitudenmessungen.

Aus dem Vorgesagten ergibt sich die folgende Situation: Bei optimaler Kopplung steht die gesamte Leitungslänge in einfachem Zusammenhang mit der Phase des Reflexionskoeffizienten von $\mathfrak{R}$. Ist jedoch die Kopplung nicht optimal, so ist die Resonanzbedingung (5b) und damit auch die gesamte Leitungslänge $l_0 + l_e$ eine Funktion von l_e, d. h. die gesamte Leitungslänge ändert sich, wenn der Ort von S verschoben wird. Dies läßt sich qualitativ verständlich machen. Bevor wir jedoch ausführlicher hierauf eingehen, seien zur Vorbereitung dessen einige Ausführungen von grundsätzlicher Bedeutung gebracht.

[1] In diesem Zusammenhang sei darauf aufmerksam gemacht, daß in einer von H. ZAHN 1926 in den Annalen der Physik veröffentlichten Arbeit die gleiche Überlegung mitgeteilt wird, jedoch mit dem unrichtigen Resultat $Ag = \frac{2A}{1-\varrho}$. Der Fehler rührt daher, daß die Amplituden A, ρA, $\rho^2 A$ ... einfach alle nur doppelt angesetzt wurden.

Bei den bisherigen Betrachtungen der Resonanzphänomene wurde so vorgegangen, daß der durch die Vierpoltheorie bekannte mathematische Apparat herangezogen wurde. Dies ging so vor sich, daß die bekannten Formeln über den Eingangswiderstand eines Vierpols auf die speziell betrachteten Resonanzanordnungen angewandt wurden. Dabei war vollkommen von den Vorgängen abgesehen, die sich auf den Leitungen selbst abspielen. Die Diskussion dieser Vorgänge bietet eine zweite Möglichkeit, eine Resonanztheorie zu entwickeln. Ein Beispiel hierfür ist die weiter oben angegebene Berechnung der Maximalamplitude (5e) im Resonanzfall (S. 31). Es ist indessen zu sagen, daß man bei der Verfolgung dieses Weges auf größere mathematische Schwierigkeiten stößt und daß daher der beschrittene, wenn auch formalere Weg einfacher ist. Die Betrachtung der Leitungsvorgänge jedoch ist von großem anschaulichem Wert. Sie erlaubt viele Phänomene qualitativ zu verstehen, die auf andere Weise unverständlich bleiben. Hierzu gehört u. a. das Phänomen der Abhängigkeit der gesamten Resonanzlänge von der Stellung von S. Es sei daher im folgenden Absatz näher auf die Vorgänge auf der Leitung eingegangen.

Von S werden dauernd fortschreitende Wellenzüge nach $\mathfrak{R}$ und K ausgesandt. Bei $\mathfrak{R}$ findet eine teilweise, bei K eine totale Reflexion dieser Wellen statt. Die von K total reflektierte Welle läuft über S hinaus nach $\mathfrak{R}$ zurück, wird dort geschwächt und wiederum reflektiert. Ebenso wird die von $\mathfrak{R}$ rücklaufende Welle nach K geworfen usw. Insgesamt ergibt sich somit eine Summe unendlich vieler Wellen auf der Leitung. Diese Summe besitzt einen endlichen Wert, da die Wellen mit fortschreitender Zahl der Reflexionen an $\mathfrak{R}$ in geometrischer Progression geschwächt werden. Der Faktor der so bedingten geometrischen Reihe wird dabei durch den Reflexionskoeffizienten von $\mathfrak{R}$ bestimmt, ist also komplex. Die Wellenverteilung zwischen S und $\mathfrak{R}$ wird bis auf einen Proportionalitätsfaktor nur durch $\mathfrak{R}$ bestimmt, da von $\mathfrak{R}$ nach S nur durch $\mathfrak{R}$ reflektierte Wellen laufen. Zu diesen gesellen sich in gleicher Richtung die bei S neu eininduzierten Wellen. Infolgedessen ist die Wellenverteilung zwischen S und K eine andere als die zwischen S und $\mathfrak{R}$. Auf Grund derselben Überlegung folgt, daß sie zwischen S und K nur von K bestimmt wird. Da

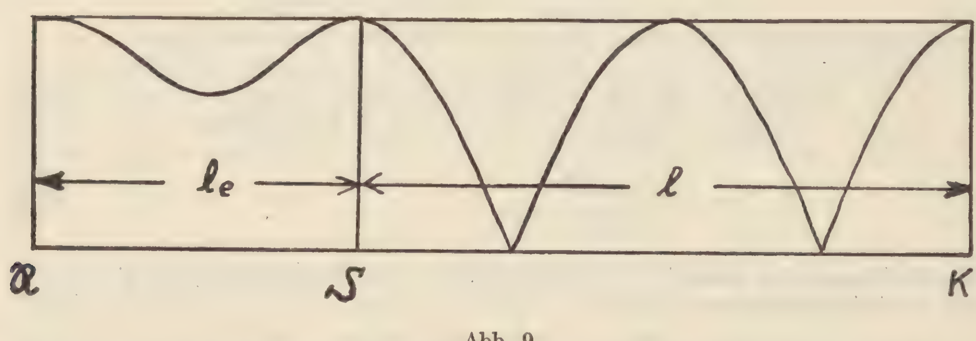


Abb. 9

an der Kurzschlußbrücke K totale Reflexion vorliegt, muß diese Verteilung durch eine (sin)-Kurve darstellbar sein, also auf Null durchgreifen. An der Stelle S schließen diese beiden Verteilungen ohne Sprung aneinander an. Es liegt also längs der ganzen Leitung eine Verteilung der skizzierten Art vor. Daß die Wellenverteilung zwischen S und $\mathfrak{R}$ nicht bis auf die Nullinie durchgreift, rührt davon her, daß die auf $\mathfrak{R}$ treffende Welle in zwei Teile gespalten wird. Der eine dient zur Deckung der in $\mathfrak{R}$ in Wärme umgesetzten Energie, der andere wird reflektiert und überlagert sich mit einem gleich großen Teil der einfallenden Welle zu einer stehenden Verteilung. Infolgedessen besteht neben einer stehenden Welle zwischen $\mathfrak{R}$ und S noch eine fortlaufende Welle, die das Minimum der Wellenverteilung auf ein von Null verschiedenes Niveau anhebt.

Auf Grund des Vorgesagten ist das Resonanzverhalten der Leitung verständlich. Die Erregung der Leitung hängt von verschiedenen Faktoren ab. Sie wird am kräftigsten sein, wenn die von K und $\mathfrak{R}$ bestimmten stehenden Wellenverteilungen in der Phase übereinstimmen und wenn S in einem Strombauch ankoppelt. Die Identität der Phase beider Wellenzüge wird durch die Gleichung (4e) ausgedrückt, die Kopplung in einem Strombauch durch Gleichung (5d) oder (5f). Ist dieKopplung nicht optimal, so wird mit Verrücken des Kurzschlusses K aus der durch Gleichung (4e) definierten Lage und mit der dadurch bedingten Verschiebung des durch K bestimmten Teiles der Stromverteilung der Strombauch dieser Verteilung nach S hin- oder weggeschoben und damit die induktive Erregung verstärkt oder geschwächt. In unmittelbarer Nähe der von der Leitung bei optimaler Kopplung geforderten Resonanz wird die Zunahme der Erregung durch bessere Kopplung die Abnahme, die aus der Verletzung von Gleichung (4e) resultiert, zunächst überwiegen und infolgedessen eine Verlagerung der Resonanzstelle zustandekommen. Wir können diesen Effekt auch so darstellen: Die Leitung fordert eine ResonanzkurveI, deren Maximum der Gleichung (4e) genügt. Außerdem ist für die Betrachtung die Kurve II wichtig, die die Stärke der Erregung in Abhängigkeit von der Lageverstimmung des Senders S gegen den Ort maximaler Kopplung darstellt. Die Überlagerung dieser Kurve II mit der an sich symmetrischen Resonanzkurve I, die die Leitung von sich aus fordert, liefert die vom Empfänger wahrgenommene Kurve III. Sie ist nur dann symmetrisch, wenn die symmetrischen Kurven I und II ihre Maxima am gleichen Ort besitzen, d. h. wenn optimale Kopplung vorliegt. Ist dies nicht der Fall, so ergibt sich eine unsymmetrische Kurve III, deren Maximum zwischen dem der Kurven I und II liegt. Offenbar weicht die Lage des Maximums der resultierenpen Kurve III von der der Resonanzkurve umso mehr ab, je flacher die Kurve I

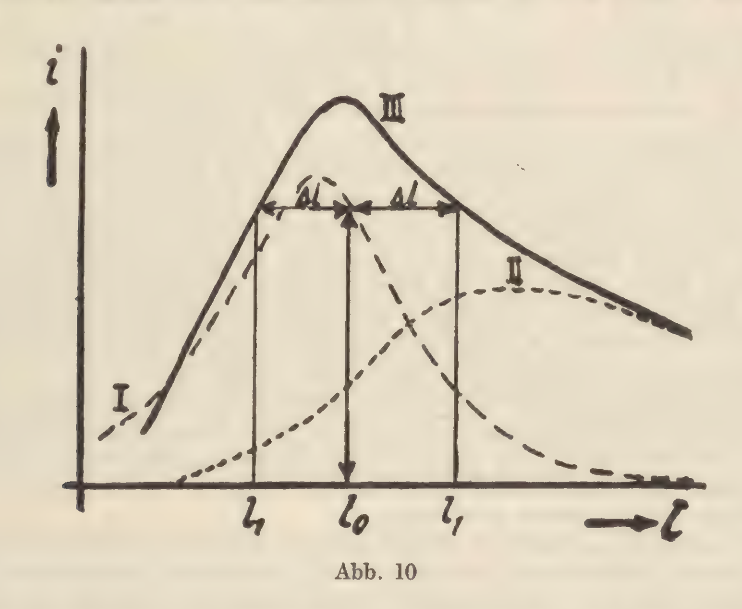


Abb. 10

ist und je größer der Abstand der Maxima der Kurven I und II ist, wie man sich an Hand der Darstellung klarmachen kann. Alle diese qualitativen Folgerungen werden weiter unten analytisch bestätigt.

Wir wenden uns nunmehr der Frage nach dem Zusammenhang der Resonanzkurvenbreite mit dem Betrag des Reflexionskoeffizienten zu. Dabei sei wieder Δl als die l-Verstimmung gegen Resonanz eingeführt, die erforderlich ist, um den Strom auf den 0,7fachen Maximalwert herabzusetzen. Der Betrag von $\mathfrak{R}_e$ nimmt den $\sqrt{2}$-fachen Resonanzwert wegen der l-Unabhängigkeit seines Realteiles an, wenn

sein Imaginärteil gleich oder entgegengesetzt gleich dem Realteil wird. Somit gilt (unter Weglassung des trigonometrischen Argumentes $(\varphi - 2\,\alpha\, l_e)$

$$\frac{2\,\rho \sin}{1 + \rho^2 - 2\,\rho \cos} + \mathrm{tg}\,\alpha\,(l_0 + \Delta\, l) = \pm \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\,\rho \cos}\,.$$

Ersetzt man unter Verwendung der Gleichung (5b) den ersten Summanden der linken Seite durch $\mathrm{tg}\,\alpha\, l_0$ und wendet auf den zweiten das Additionstheorem der tg-Funktion an, so folgt nach kurzer Zwischenrechnung

$$\frac{\pm (1 - \rho^2)}{1 + \rho^2 - 2\,\rho \cos} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha\, \Delta\, l\, [1 + \mathrm{tg}^2\, \alpha\, l_0]}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\, \Delta\, l \cdot \mathrm{tg}\,\alpha\, l_0}$$

und hieraus weiter

$$\mathrm{tg}\, 2\,\pi \frac{\Delta\, l}{\lambda} = \frac{\pm (1 - \rho^2) \cos^2 \alpha\, l_0}{1 + \rho^2 - 2\,\rho \cos \pm (1 - \rho^2) \sin \alpha\, l_0 \cdot \cos \alpha\, l_0}\,. \tag{5h}$$

Im Falle optimaler Kopplung speziell geht dies wegen der dann gültigen Gleichungen (5d) und (5f) über in die einfache Formel

$$\mathrm{tg}\, 2\,\pi \frac{\Delta\, l}{\lambda} = \pm \frac{1 - \rho}{1 + \rho}\,. \tag{5i}$$

Den beiden Vorzeichen in (5h) entsprechen die zwei $\Delta\, l$-Werte zu beiden Seiten der Resonanzstelle. Wegen der verschiedenen Werte, die der Nenner für die beiden Vorzeichen annimmt, sind die beiden l-Beträge verschieden. Es ergibt sich nur dann Gleichheit, wenn

1. $1 + \rho^2 - 2\,\rho \cos \doteq 0$ ist. Diese Forderung läßt sich wegen $|\cos| < 1$ nur für $\rho = 1$ verwirklichen, da $1 + \rho^2 - 2\,\rho \cdot \cos > 1 + \rho^2 - 2\,\rho = (1 - \rho)^2 > 0$ für $\rho \neq 1$ gilt. Der Fall $\rho = 1$ ist aber uninteressant, da er $\Delta\, l = 0$ bedingt.

2. $\sin \alpha\, l_0 = 0$ ist. Dies führt auf die Forderung optimaler Kopplung.

3. $\cos \alpha\, l_0 = 0$ ist. Es liegt minimalste Erregung der Leitung vor, da sich S in einem Stromminimum befindet. Dieser Fall ist ebenfalls nicht von praktischem Interesse. In Übereinstimmung mit den qualitativen Überlegungen folgt somit: **Die Resonanzkurve wird nur bei optimaler und minimaler Kopplung von S symmetrisch.** Dieser Satz ist von großem praktischem Wert, denn aus ihm folgt, daß das Vorliegen optimaler Kopplung nicht nur am Maximalausschlag, sondern auch an der Symmetrie der Resonanzkurve erkennbar ist. Die Einstellung optimaler Kopplung ist auf jeden Fall zweckmäßig, denn die dann gültigenBeziehungen (4e) und (5i) gestatten in einfacher Weise die Bestimmung von ρ und φ, während dies mit Hilfe der Gleichungen (5b) und (5h) schwierig ist.

Die Brauchbarkeit der Methode B ist in hohem Maße davon abhängig, wie groß der Fehler der Beziehungen (4e) und (5i) wird, wenn eine geringe örtliche Verstimmung des Senders S gegen den Ort optimaler Kopplung gegeben ist. Der Behandlung der Frage nach den dann erforderlichen Korrekturen der Beziehungen (4e) und (5i) wollen wir uns nunmehr zuwenden.

Zunächst sei die Frage erörtert, wie die gesamte Länge der Leitung im Resonanzfall vom Ort der Ankopplung S abhängig ist. In Gleichung (5b) werde der Abstand der Koppelschleife S vom Ort optimaler Kopplung und die Änderung der Resonanzlänge l_0 gegenüber dem Fall optimaler Kopplung eingeführt. Diese Größen seien mit $\Delta\, l_e$ und $\Delta\, l_0$ bezeichnet. Sie sind durch die Gleichungen

$$l_e = l_e\,(\mathrm{opt.}) + \Delta\, l_e; \quad l_0 = l_0\,(\mathrm{opt.}) + \Delta\, l_0$$

definiert und bedingen wegen der Beziehungen (5d) und (5f) für optimale Erregung

$$\sin(\varphi - 2\,\alpha\, l_e) = \sin(2\,\alpha\, \Delta\, l_e)$$

$$\cos(\varphi - 2\,\alpha\, l_e) = -\cos(2\,\alpha\, \Delta\, l_e), \tag{5k}$$

wie man durch Anwendung der trigonometrischen Additionstheoreme erkennt. Damit geht Gleichung (5b) über in

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\Delta l_0}{\lambda} = - \frac{\sin 4\pi \frac{\Delta l_e}{\lambda}}{\frac{1+\rho^2}{2\rho} + \cos 4\pi \frac{\Delta l_e}{\lambda}}. \tag{5l}$$

Die Korrektur, die die gesamte Leitungslänge bei nicht optimaler Erregung erfährt, hat natürlich den Wert

$$\Delta L = \Delta l_e + \Delta l_o.$$

Wird in Gleichung (5l) Δl_0 also durch ΔL und Δl_e ersetzt, so folgt durch nochmalige Anwendung des tg-Additionstheorems

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha\, \Delta L - \operatorname{tg}\alpha\, \Delta l_e}{1 + \operatorname{tg}\alpha\, \Delta L \cdot \operatorname{tg}\alpha\, \Delta l_e} = - \frac{\sin 2\alpha \frac{\Delta l_e}{\lambda}}{\frac{1+\rho^2}{2\rho} + \cos 2\alpha \frac{\Delta l_e}{\lambda}}$$

und hieraus durch Auflösen nach $\operatorname{tg} \alpha\, \Delta L$ nach einigen Zwischenrechnungen das Ergebnis

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} = \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2 \operatorname{tg} 2\pi \frac{\Delta l_e}{\lambda}. \tag{5m}$$

Auch hier tritt also ρ nur in der vom Abtastverfahren her bekannten Form als Wellenverhältnis $W = \frac{1-\rho}{1+\rho}$ auf. Gleichung (5m) entnimmt man, daß ΔL und Δl_e vorzeichengleich sind und daß ΔL kleiner als Δl_e ist. Und zwar ist der Unterschied zwischen ΔL und Δl_e umso größer, je größer ρ ist. Im Falle $\rho = 1$, d. h. bei sehr spitzen Resonanzkurven (Gleichung 5h!), wird ΔL gleich Null, d. h. bei Messungen mit nicht dämpfenden Widerständen $\mathfrak{R}$ ist die gesamte Leitungslänge unabhängig vom Ort der Ankopplung. Dieses Ergebnis war bereits weiter oben qualitativ gewonnen und anschaulich verstanden worden. Die Funktion (5m) ist in der umstehend folgenden Abbildung 11 dargestellt. Und zwar ist der praktisch vorwiegend wichtige Bereich kleiner $\Delta L/\lambda$-Werte abgebildet.

Nunmehr sei untersucht, wie die Resonanzkurvenbreite von der Verstimmung des Senders S gegen den Ort optimaler Kopplung abhängt. Dies erfordert den Ersatz der Größe l_0 in Gleichung (5h) durch l_e. Zu diesem Zweck werden zunächst die trigonometrischen Funktionen $\sin \alpha\, l_0$ und $\cos \alpha\, l_0$ durch $\operatorname{tg} \alpha\, l_0$ ersetzt

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} [(1 + \rho^2 - 2\rho \cos)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha\, l_0) \pm (1-\rho^2) \operatorname{tg} \alpha\, l_0] = \pm (1-\rho^2) \tag{5n}$$

und dann für $\operatorname{tg} \alpha\, l_0$ mit Hilfe von Gleichung (5b) ein nur von $\varphi - 2\alpha\, l_e$ abhängiger Ausdruck eingeführt. Es folgt für den eckigen Klammerausdruck

$$[\,..\,] = 1 + \rho^2 - 2\rho \cos + \frac{4\rho^2 \sin^2 \pm (1-\rho^2)\, 2\rho \sin}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos}.$$

Führt man auf der rechten Seite der Beziehung (5n) an Stelle von $1 - \rho^2$ den Wert $\frac{1-\rho}{1+\rho}$ ein, so ist die eckige Klammer zu ersetzen durch den Ausdruck

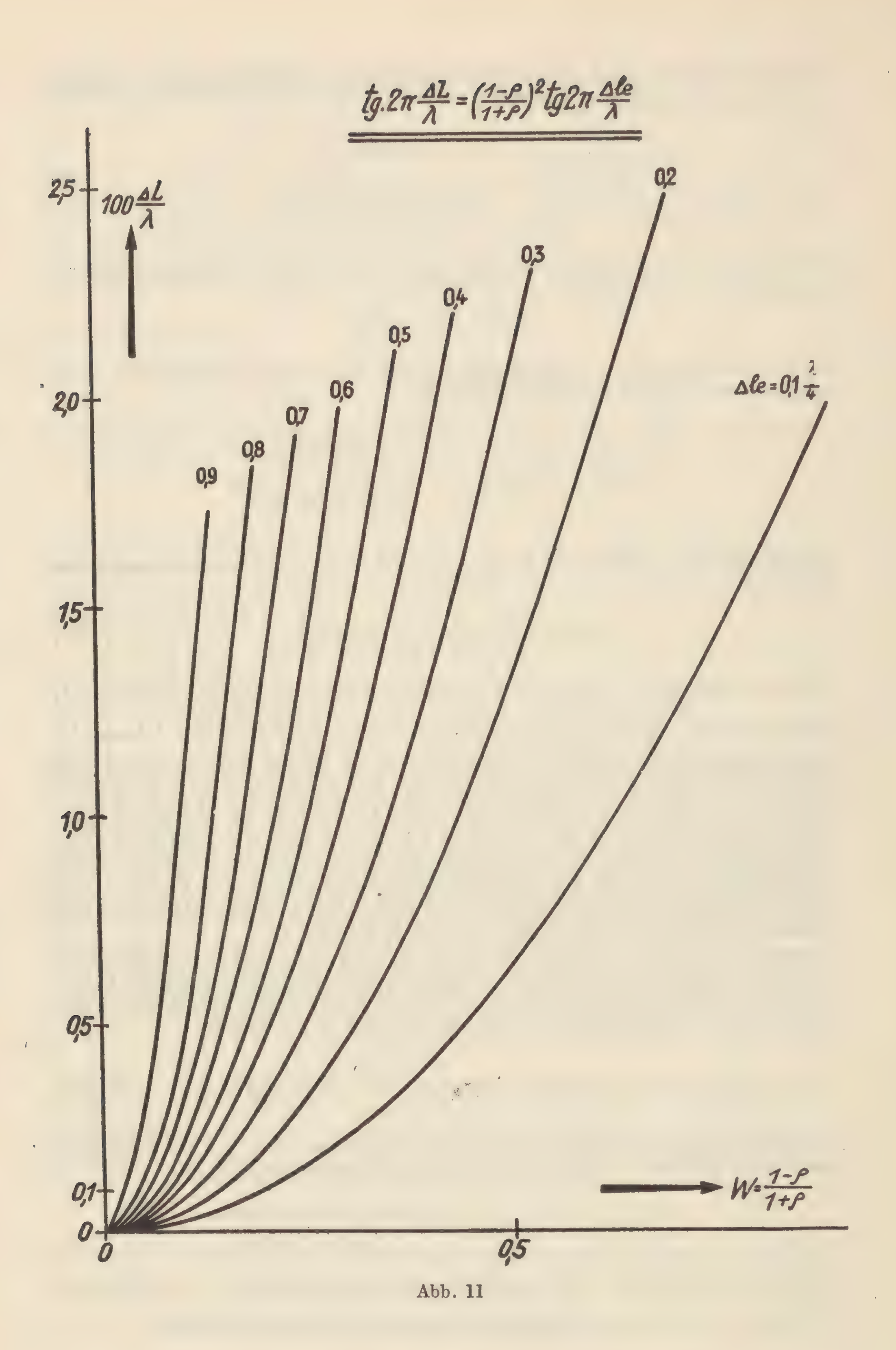

$tg.2\pi\frac{\Delta l}{\lambda} = \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2 tg2\pi\frac{\Delta le}{\lambda}$
$100\frac{\Delta l}{\lambda}$
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0,1
0
0
0,5
$W = \frac{1-\rho}{1+\rho}$
$\Delta le = 0{,}1\frac{\lambda}{4}$
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9

Abb. 11

$$1-\frac{2\rho\,(1+\cos)}{(1+\rho)^2}+\frac{4\rho^2\sin^2\mp(1-\rho^2)\,2\rho\sin}{(1+\rho)^2\,(1+\rho^2-2\rho\cos)}=$$

$$1-2\rho\,\frac{1-\rho}{1+\rho}\,\frac{\dfrac{1-\rho}{1+\rho}(1+\cos)\pm\sin}{1+\rho^2-2\rho\cos}\,.$$

Man erhält so als Endergebnis einen Ausdruck, der die durch nicht optimale Kopplung bedingte Korrektur der Beziehung (5i) leichter erkennen läßt, als dies die Beziehung (5h) gestattet:

$$\operatorname{tg} 2\pi\frac{\Delta\,l}{\lambda}\left[1-2\rho\,\frac{1-\rho}{1+\rho}\,\frac{\dfrac{1-\rho}{1+\rho}(1+\cos)\pm\sin}{1+\rho^2-2\rho\cos}\right]=\pm\,\frac{1-\rho}{1+\rho}\cdot$$

Führt man hierin an Stelle des trigonometrischen Argumentes $\varphi-2\,\alpha\,l_e$ das Argument $2\,\alpha\,\Delta\,l_e$ ein, so folgt wegen der Beziehung (5k)

$$\operatorname{tg} 2\pi\frac{\Delta\,l}{\lambda}\left[1-2\rho\,\frac{1-\rho}{1+\rho}\,\frac{\dfrac{1-\rho}{1+\rho}\left(1-\cos 4\pi\dfrac{\Delta\,l_e}{\lambda}\right)\pm\sin 4\pi\,\dfrac{\Delta\,l_e}{\lambda}}{1+\rho^2+2\rho\cos 4\pi\dfrac{\Delta\,l_e}{\lambda}}\right]=\frac{1-\rho}{1+\rho}\cdot \qquad (5o)$$

In der folgenden Tabelle sind für verschiedene ρ- und $\Delta\,l_e$-Werte die mit 100 multiplizierten Beträge der jeweils beiden zugehörigen $\Delta\,l/\lambda$-Werte nach Gleichung (5o) berechnet. Durch Addition der beiden zu gleichem ρ und $\Delta\,l_e$ gehörigen $\Delta\,l$-Werte erhält man die gesamte Kurvenbreite. In Abbildung 12 wird der Quotient dieser

$\frac{\Delta l_e}{\lambda}$ ↓ \ ρ →	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0	0	0,84	1,76	2,77	3,9	5,1	6,5	7,9	9,4	10,9	12,5
	0	0,84	1,76	2,77	3,9	5,1	6,5	7,9	9,4	10,9	12,5
0,025	0	0,85	1,79	2,86	4,1	5,4	6,8	8,3	9,9	11,3	12,5
	0	0,84	1,73	2,71	3,8	4,9	6,2	7,5	9,0	10,7	12,5
0,05	0	0,86	1,84	2,94	4,2	5,7	7,3	8,9	10,5	11,8	12,5
	0	0,83	1,70	2,64	3,7	4,7	5,9	7,3	8,8	10,5	12,5
0,075	0	0,87	1,87	3,05	4,5	6,1	7,9	9,7	11,3	12,4	12,5
	0	0,82	1,67	2,58	3,6	4,6	5,8	7,1	8,6	10,4	12,5
0,10	0	0,88	1,92	3,20	4,8	6,7	8,8	10,9	12,4	13,0	12,5
	0	0,81	1,64	2,51	3,5	4,5	5,6	7,0	8,6	10,5	12,5
0,125	0	0,89	2,00	3,42	5,3	7,6	10,2	12,4	13,7	13,7	12,5
	0	0,80	1,61	2,45	3,4	4,4	5,6	7,1	8,8	10,7	12,5
0,15	0	0,91	2,11	3,87	6,2	9,2	12,5	14,6	15,7	14,3	12,5
	0	0,79	1,57	2,39	3,3	4,4	5,7	7,3	9,5	11,1	12,5
0,175	0	0,94	2,34	4,58	8,1	12,7	16,5	17,6	16,8	14,8	12,5
	0	0,77	1,53	2,32	3,3	4,5	6,5	8,0	10,0	11,7	12,5
0,20	0	1,02	2,91	6,77	14,2	20,4	21,8	20,3	17,7	14,9	12,5
	0	0,74	1,48	2,35	3,5	5,2	7,3	9,5	10,9	12,4	12,5
0,225	0	1,33	7,42	—	—	—	24,4	20,5	17,3	14,8	12,5
	0	0,71	1,56	2,93	5,1	7,9	10,6	12,5	13,2	13,3	12,5
0,25	0	24,2	23,2	22,2	21,1	19,9	18,6	17,1	15,6	14,1	12,5
	0	24,2	23,2	22,2	21,1	19,9	18,6	17,1	15,6	14,1	12,5

Kurvenbreite durch die Breite für gleiches ρ, aber optimale Erregung $\Delta\, l_e = 0$ in Abhängigkeit von ρ mit $\Delta\, l_e$ als Parameter dargestellt. Die Abweichung dieses Quotienten vom Wert 1 gibt uns den Relativfehler der für optimale Kopplung gültigen einfachen Beziehungen, der durch die in Wirklichkeit nicht optimale Kopplung bedingt wird. Man erkennt, daß er in Abhängigkeit von ρ einen maximalen Wert in der Umgebung von $(1 - \rho)/(1 + \rho) = 0{,}5$ erreicht. Ist $\Delta\, l_e$ nicht größer als $\lambda/20$, so kann er nicht größer als 3% werden. Da für solch kleine $\Delta\, l_e$-Werte die Tangensausdrücke der Beziehung (5m) durch ihr Argument ersetzt werden dürfen, folgt: Für $\Delta\, l_e \leq \lambda/20$ wird die Resonanzkurvenbreite der Beziehung (5i) praktisch richtig bestimmt. Die Resonanzlänge der Leitung wird um den kleinen Wert $\Delta L = (1 - \rho/1 + \rho)^2 \Delta\, l_e$ falsch ermittelt. Hieraus folgt, daß komplexe Widerstände, die stark dämpfend wirken, besonders genau optimale Erregung erfordern. Diese Widerstände erkennt man an ihrer großen Kurvenbreite. Ist dagegen die Kurvenbreite kleiner als $\lambda/50$, so sind unter der in praxi immer erfüllten Voraussetzung $\Delta\, l_e < \lambda/8$ die durch nicht optimale Einstellung bedingten Fehler vernachlässigbar. Die Längenkorrektur ist dann kleiner als 0,1% der Wellenlänge (Gl. 5m) und die Kurvenbreite auf mindestens 1% genau bestimmt (Abb. 12). Wir wenden uns nun der Diskussion einer Resonanzmethode zu, die die Abhängigkeit von Resonanzkurvenbreite und Resonanzlänge vom Ort der Senderkopplnng S nicht aufweist.

6. Die Resonanzanordnung mit feststehender Senderankopplung und mit der Kurzschlußbrücke verbundenem Empfänger (Fall C).

Wegen der gleichen Stellung des Senders wie im Falle B wird der Eingangswiderstand $\mathfrak{R}_e$ auch im Falle C durch Gleichung (5a) ausgedrückt. Jedoch ist der Empfängerstrom jetzt nicht mehr mit dem Eingangsstrom identisch oder proportional dazu. Da zwischen S und E die Verteilung durch K bestimmt wird (Abb. 9), gilt vielmehr für den Zusammenhang zwischen Empfängerstrom i_E und Eintrittsstrom i_S

$$i_S = i_e \cdot \cos \alpha\, l. \tag{6a}$$

Wegen $i_S = U/\mathfrak{R}_e$ folgt hieraus

$$i_e = \frac{U}{\mathfrak{R}_e \cos \alpha\, l}. \tag{6b}$$

Aus Gleichung (6b) folgt, daß die Untersuchung von $\mathfrak{R}_e \cos \alpha\, l$ im vorliegenden Fall C der von $\mathfrak{R}_e$ im Falle B entspricht. Unter Weglassung des Argumentes $\varphi - 2\,\alpha\, l_e$ gilt also:

$$\mathfrak{R}_e \cos \alpha\, l = Z \left[\frac{(1 - \rho^2) \cos \alpha\, l}{1 + \rho^2 - 2\,\rho \cos} + j \left(\frac{2\,\rho \sin \cdot \cos \alpha\, l}{1 + \rho^2 - 2\,\rho \cos} + \sin \alpha\, l \right) \right]. \tag{6c}$$

Das Studium dieser Beziehung erscheint schwieriger als das der Beziehung (5a), da nunmehr auch der Realteil von l abhängig ist und die Resonanzbedingung somit nicht einfach durch das Verschwinden des imaginären Teiles festgelegt wird. Indessen ergibt die Berechnung des Betrages von $\mathfrak{R}_e \cos \alpha\, l$ einen einfachen Wert. Es folgt aus

$$\left| \frac{\mathfrak{R}e \cos \alpha\, l}{Z} \right|^2 =$$

$$\frac{(1-\rho^2)^2 \cos^2 \alpha\, l + 4\,\rho^2 \sin^2 \cos^2 \alpha\, l + 4\,\rho \sin \sin \alpha\, l \cos \alpha\, l\,(1 + \rho^2 - 2\,\rho \cos) + \sin^2 \alpha\, l\,(1 + \rho^2 - 2\,\rho \cos)^2}{(1 + \rho^2 - 2\,\rho \cos)^2}$$

wegen

$$(1 - \rho^2)^2 \cos^2 \alpha\, l + 4\,\rho^2 \sin^2 \cos^2 \alpha\, l = \cos^2 \alpha\, l\,[(1 + \rho^2)^2 - 4\,\rho^2 \cos^2]$$
$$= \cos^2 \alpha\, l\,(1 + \rho^2 - 2\,\rho \cos)\,(1 + \rho^2 + 2\,\rho \cos)$$

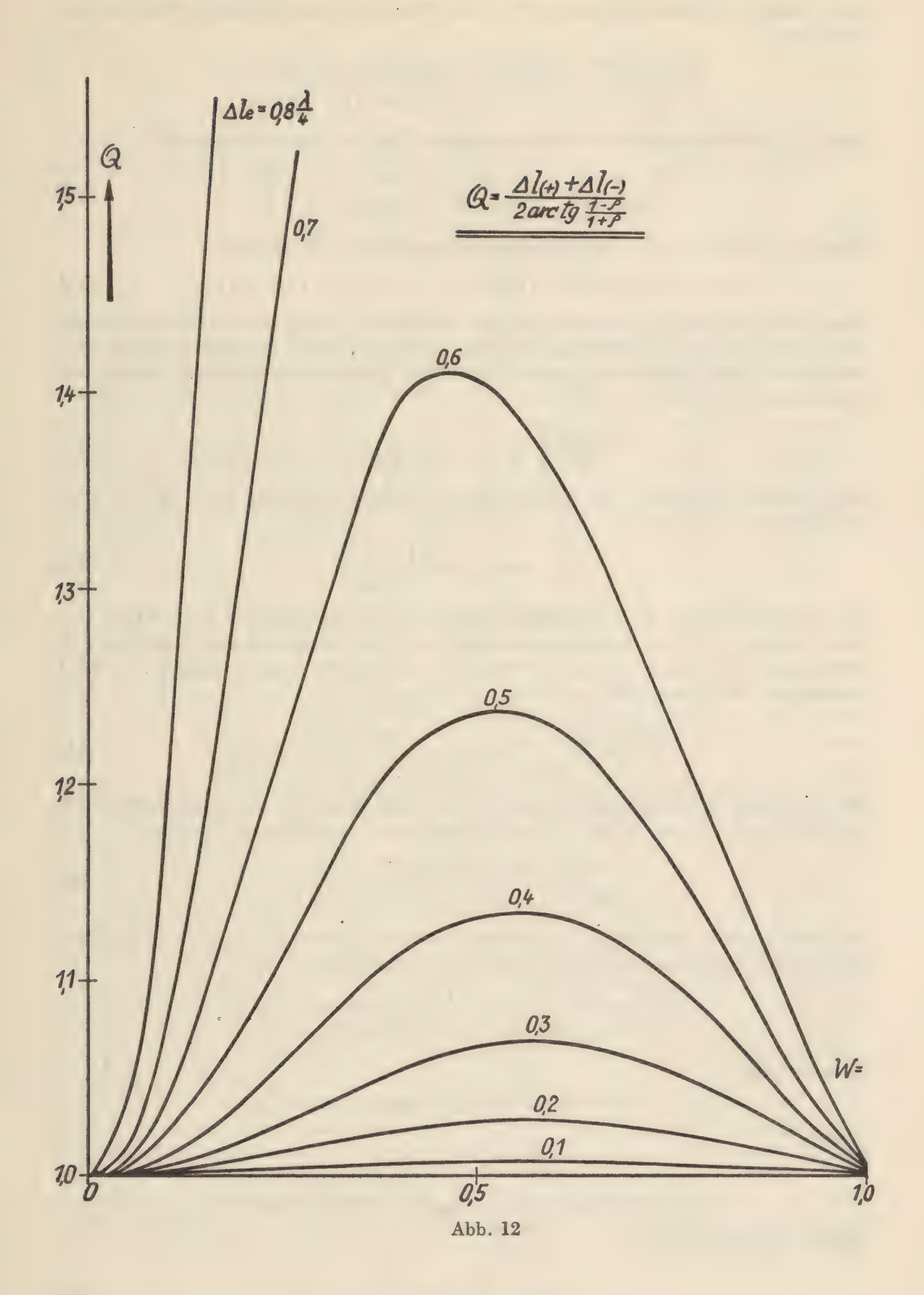


Abb. 12

nach kurzer Zwischenrechnung unter Benutzung des Additionstheorems der cos-Funktion

$$\left|\frac{\Re_e \cos \alpha l}{Z}\right|^2 = \frac{1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi - 2\alpha l - 2\alpha l_e)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - 2\alpha l_e)}.$$

Da $l + l_e$ gleich der gesamten Leitungslänge L ist, ist dies identisch mit

$$\left|\frac{\Re_e \cos \alpha l}{Z}\right|^2 = \frac{1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi - 2\alpha L)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - 2\alpha l_e)}. \tag{6d}$$

Resonanz liegt vor, wenn der Zähler möglichst klein wird, also wenn

$$\cos(\varphi - 2\alpha L_0) = -1 \text{ bzw. } \varphi - 2\alpha L_0 = (2n + 1)\pi. \tag{6e}$$

Diese Bedingung ist identisch mit der der Anordnung A und mit der der Anordnung B im Falle optimaler Kopplung. Sie ist unabhängig davon, ob optimal erregt wird oder nicht. Dies ist als ein großer Vorteil der Resonanzanordnung C anzusehen. Im Resonanzfall gilt

$$\left|\frac{\Re_e \cos \alpha l}{Z}\right|^2 = \frac{(1 - \rho)^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - 2\alpha l_e)}. \tag{6f}$$

Bei optimaler Erregung, für die die gleiche Bedingung wie im Falle B gilt, wird dieser Wert am kleinsten:

$$\Re_e \cdot \cos \alpha l = Z \frac{1 - \rho}{1 + \rho}. \tag{6g}$$

Im Antiresonanzfall, d. h. im Falle größten Wertes $\Re_e \cos \alpha l$, muß $\varphi - 2\alpha L = 2n\pi$ gelten, d. h. die Antiresonanzstellen und die Resonanzstellen liegen in $\lambda/4$-Abstand. Auch dies entspricht der im Falle A vorgefundenen Situation. Es folgt hierfür aus Gleichung (6d)

$$\left|\frac{\Re_e \cos \alpha l}{Z}\right|^2_{\text{max.}} = \frac{(1 + \rho)^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - 2\alpha l_e)}. \tag{6h}$$

Bei optimaler Erregung wird $\Re_e \cos \alpha l = Z$. Der Quotient der Beziehungen (6f) und (6h) ergibt das von dem Ort der Ankopplung S unabhängige Resultat

$$\frac{i\,(\text{min.})}{i\,(\text{max.})} = \frac{\Re_e \cos \alpha l_{(\text{min.})}}{\Re_e \cos \alpha l_{(\text{max.})}} = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}. \tag{6i}$$

Die Resonanzkurvenbreite $2\Delta l$, die durch die Stromwerte $i = 1/\sqrt{2}\, i\,(\text{max.})$ festgelegt wird, folgt aus der Vereinigung von (6d) mit (6f):

$$\frac{2(1 - \rho)^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos} = \frac{1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi - 2\alpha L)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos}.$$

Hieraus folgt

$$(1 - \rho)^2 = 2\rho + 2\rho \cos(\varphi - 2\alpha L).$$

Wegen

$$\cos(\varphi - 2\alpha L) = \cos(\varphi - 2\alpha L_0 - 2\alpha \Delta l) = -\cos 2\alpha \Delta l$$

$$1 + \cos(\varphi - 2\alpha L) = 1 - \cos 2\alpha \Delta l = 2\sin^2 \alpha \Delta l$$

ist dies identisch mit

$$\sin 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} = \pm \frac{1 - \rho}{2\sqrt{\rho}}. \tag{6k}$$

Aus Gleichung (6k) folgt weiter

$$1 + \sin^2 2\,\pi \frac{\Delta\, l}{\lambda} = 1 + \frac{(1-\rho)^2}{4\,\rho} = \frac{(1+\rho)^2}{4\,\rho}.$$

Division dieser Gleichung mit der Beziehung für $\sin^2 2\,\pi\,\Delta\, l/\lambda$ liefert den Zusammenhang von $\Delta\, l/\lambda$ und $1-\rho/1+\rho$:

$$\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2 = 1 + \frac{1}{\sin^2 2\,\pi \frac{\Delta\, l}{\lambda}}. \tag{6l}$$

In der nebenstehenden Tabelle sind die $\Delta\, l/\lambda$-Werte des Verfahrens C in Abhängigkeit von ρ angegeben. Außerdem sind die Werte, wie sie sich bei den Resonanzanordnungen A und B ergeben, zum Vergleich mitgeteilt. Man erkennt, daß bei geringer Dämpfung die drei Verfahren weitgehend übereinstimmende Ergebnisse liefern. Für $\rho > 0{,}7$ ist die Übereinstimmung der $\Delta\, l$-Werte auf wenigstens 3% gesichert. Gleichung (6k) läßt außerdem erkennen: Die Resonanzkurve ist symmetrisch, ihre Breite ist unabhängig vom Ort der Ankopplung S.

ρ	A	B	C
0	—	0,125	—
0,1	0,190	0,1093	—
0,2	0,113	0,0936	0,1763
0,3	0,085	0,0786	0,1106
0,4	0,0665	0,0646	0,0786
0,5	0,0520	0,0512	0,0575
0,6	0,0392	0,0390	0,0416
0,7	0,0273	0,0278	0,0286
0,8	0,0176	0,0176	0,0178
0,9	0,0084	0,0084	0,0084
1,0	0	0	0

Der Zusammenhang zwischen Resonanzkurvenbreite und ρ sowie der Zusammenhang des Quotienten i (min) : i (max) mit ρ (Gleichung 6k und 6i) ist der gleiche wie er bei der Abtastmethode zwischen der Minimumbreite sowie dem Wellenverhältnis mit ρ besteht. Dieses für alle ρ-Werte exakt gültige Ergebnis unserer Untersuchungen ist nicht zufällig. Es rührt davon her, daß der Zähler der Gleichung (6a) bis auf einen konstanten Faktor identisch ist mit der Spannungsverteilung, die bei dem Abtastverfahren gewonnen wird[1] und der Nenner von Gleichung (6a) unabhängig von L ist. Da aber der Zähler von Gleichung (6d) umgekehrt proportional zum Empfängerstrom ist, folgt das wichtige Ergebnis: Die bei Variation der Kurzschlußbrücke sich ergebende Längenabhängigkeit des reziproken Wertes vom Empfängerstrom ist identisch mit der bei dem Abtastverfahren meßbaren Spannungsverteilung. Dieser Satz stellt eine Verbindung zwischen dem Resonanzverfahren C und dem Abtastverfahren her. Aus ihm folgen die bereits oben festgestellten Zusammenhänge zwischen Wellenverhältnis sowie Minimumbreite und dem Stromverhältnis i (min) : i (max) sowie der Resonanzkurvenbreite. Damit folgt weiter: Der einzige Unterschied zwischen der Abtastmethode und dem Resonanzverfahren C besteht in dem Ersatz der Ausmessung des Minimums durch die Untersuchung der Resonanzkurve. Alle Einzelheiten der Auswertung sind dieselben, d. h. der mathematische Apparat zur Ermittlung von ρ und φ besitzt gleichen Umfang. Über die Vorteile der Maximummessung des Resonanzverfahrens gegenüber der Minimumuntersuchung des Abtastverfahrens bei stark wellenwiderstandsungleichen Abschlußwiderständen wurde bereits oben (Abschnitt 4) gesprochen. Weiter erkennt man aus Gleichung (6d): Nur der Nenner der Gleichung ist von l_e unabhängig. Und zwar ist, von einem Phasenunterschied des trigonometrischen Argumentes um π abgesehen, der Nenner in gleicher Weise

[1] Vergleiche den Zähler von Gleichung (6d) mit dem Gesetz der Spannungsverteilung, wie es z. B. von K. S. Knol und M. J. O. Strutt l. c. angegeben wird.

von l_e wie der Zähler von L abhängig. Daraus folgt, daß man bei unverrücktem Kurzschluß K die Stromverteilung längs der Leitung durch Verrücken der Senderankopplung S ermitteln kann. Man kann also durch Variation der Lage von S gleiche Resultate wie bei der Abtastmethode erhalten.

7. Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit werden nichtquasistationäre Resonanzmethoden behandelt. Einleitend wird gezeigt, daß Messungen mit quasistationären Methoden bis zu Wellenlängen von etwa 50 cm herab möglich sind. Voraussetzung dabei ist, daß sie sich nur auf die Ermittlung verlustfreier Widerstände erstrecken und gewisse Korrekturen, die durch den Beginn des nichtquasistationären Verhaltens bedingt sind, berücksichtigt werden. Einige DK-Bestimmungen mit Hilfe von Mikroschwingungskreisen werden als Beispiel mitgeteilt.

Wegen der angegebenen Beschränkungen sind im Dezimeterwellengebiet nur nichtquasistationäre Methoden von praktischem Wert. Es wird daher im Hauptteil der Arbeit zunächst untersucht, welche Resonanzanordnungen von besonderem Interesse sind. Es sind dies die Verfahren mit induktiver Erregung. Hierbei sind nun wiederum fünf verschiedene Anordnungen möglich. Die drei praktisch wichtigen werden eingehend diskutiert.

Bei der ersten Anordnung (A) werden Sender und Empfänger mit dem Kurzschlußbügel, der die Leitungslänge variiert, verschoben. Der Betrag ρ des Reflexionskoeffizienten, der durch den zu bestimmenden Widerstand am anderen Leitungsende gegeben ist, kann auf verschiedene Weise ermittelt werden.

$$1.\quad \frac{1-\rho}{1+\rho} = \sqrt{\frac{i\,(\min)}{i\,(\max)}} = \frac{i\,(\min)}{i\,(\lambda/8)} = \frac{i\,(\lambda/8)}{i\,(\max)}.$$

$$2.\quad 2 \sin 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{\pm (1-\rho^2)}{\sqrt{3\rho - 2\rho^2 + 3\rho^3}}$$

$$3.\quad R_e\,(\min) = Z \frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

Darin sind i (max), i (min) und i ($\lambda/8$) die vom Empfänger gemessenen Ströme bei Abstimmung auf Resonanz, Antiresonanz und den dazu um $\lambda/8$ verstimmten Zustand. Δl ist die halbe Breite der symmetrischen Resonanzkurve, wobei diese Breite in 0,7-facher Maximalhöhe gemessen wird. R_e (min) ist der zum maximalen Empfangsstrom proportionale Eingangswiderstand der Leitung. Die Phase φ des Reflexionskoeffizienten wird durch die Bedingung $\varphi - 2\alpha l = (2n+1)\pi$ gegeben. Diese Beziehung ist identisch mit der Phasenbeziehung der anderen Resonanzverfahren und mit der der Abtastmethode. Der Nachteil des Verfahrens besteht darin, daß eine direkte Einwirkung des Senders S auf den Empfänger E schlecht vermeidbar ist und die Variation der Lage von S eine konstante Erregung erschwert.

Die zweite Anordnung (B) vermeidet diese Nachteile. Sender und Empfänger stehen fest, wobei letzterer zwischen S und Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}$ angeordnet ist. Der Nachteil dieser Anordnung ist, daß φ und ρ in komplizierter Weise von der Entfernung l_e des Senders von $\mathfrak{R}$ abhängen. Diese Abhängigkeit ist um so größer, je mehr der Ort des Senders vom Ort optimaler Erregung abweicht und je mehr ρ von 1 verschieden ist. Bezeichnet ΔL die Abweichung der gesamten Leitungslänge von dem Wert bei optimaler Erregung und Δl_e die Abweichung des Wertes l_e vom optimalen Wert l_e (opt), so gilt

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} = \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2 \operatorname{tg} 2\pi \frac{\Delta l_e}{\lambda}$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} \left[1 - 2\rho \frac{1-\rho}{1+\rho} \frac{\frac{1-\rho}{1+\rho}\left(1 - \cos 4\pi \frac{\Delta l_e}{\lambda}\right) \pm \sin 4\pi \frac{\Delta l_e}{\lambda}}{1 + \rho^2 + 2\rho \cos 4\pi \frac{\Delta l_e}{\lambda}} \right] = \pm \frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

Tabellen und graphischen Darstellungen, die in der vorliegenden Arbeit berechnet werden, kann der Fehler der bei optimaler Erregung gültigen Beziehungen

$$\varphi - 2\alpha l = (2n+1)\pi$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

entnommen werden. Außerdem gilt bei optimaler Erregung

$$\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2 = \left[\frac{i\,(\mathrm{opt})}{(i\,\lambda/s)}\right]^2 - 1$$

und, ebenso wie im Falle A,

$$R\,(\mathrm{opt}) = Z \frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

Experimentell ist die optimale Erregung erkennbar an dem bei ihr vorliegenden besonders großen Resonanzwert des Empfängerstromes und an der, einzig bei ihr vorliegenden, Symmetrie der Resonanzkurve.

Bei der Anordnung C steht S fest und E wird mit dem Kurzschluß verschoben. Diese Anordnung ist insofern als ideal zu bezeichnen, als sie die Nachteile der Fälle A und B vermeidet und in experimentell besonders einfacher Weise die Freihaltung der Empfängerableitung von Hochfrequenz ermöglicht. Für die Resonanzkurvenbreite, den Wert i (min) : i (max) und die Phasenbeziehung gelten die gleichen Formeln wie beim Abtastverfahren:

$$\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2 = \left[\frac{i\,(\max)}{i\,(\min)}\right]^2 = 1 + \frac{1}{\sin^2 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda}}$$

$$\varphi - 2\alpha l = (2n+1)\pi.$$

Dies rührt daher, daß die durch Ortsvariation des Kurzschlusses feststellbare Längenabhängigkeit von $1/i$ identisch ist mit der Spannungsverteilung, wie sie bei der Abtastmethode ermittelt wird. Es besteht hier also eine starke formale Übereinstimmung mit der Abtastmethodik, wobei allerdings eine Minimumbreitenmessung durch eine Resonanzkurvenuntersuchung zu ersetzen ist.

In der Arbeit werden die Vorteile der Resonanzverfahren gegenüber der meist üblichen Methode der Spannungsabtastung dargelegt. Insbesondere wird nachgewiesen, daß die weitverbreitete Ansicht, nach der Resonanzverfahren bei wellenwiderstandsnahen Abschlußwiderständen ungeeigneter als das Abtastverfahren sein sollen, falsch ist.

Kapitel III.

EINE RESONANZANORDNUNG ZUR MESSUNG KOMPLEXER WIDERSTÄNDE UND ELEKTRISCHER SOWIE MAGNETISCHER STOFFKONSTANTEN IM DEZIMETERWELLENBEREICH.

1. Einleitung.

Weiter oben[1] wurde gezeigt, daß Messungen zweckmäßiger nach dem Resonanzverfahren durchgeführt werden als nach dem „Abtast"-Verfahren, bei dem die Spannungsverteilung längs einer Doppelleitung aufgenommen wird. Der Grund für die Überlegenheit des Resonanzverfahrens ist in der Tatsache zu sehen, daß bei stark vom Wellenwiderstand der Resonanzleitung abweichenden Abschlußwiderständen die Untersuchung des kleinen Minimumwertes, die bei der Abtastmethodik erforderlich ist, durch eine Untersuchung der Resonanzkurve in der Nähe des Maximums ersetzt wird. Bei wellenwiderstandsnahen Endwiderständen ist nicht, wie oft behauptet, das Resonanzverfahren unterlegen, da hier ebenso wie bei der Abtastmethode durch Bestimmung des Quotienten aus einem Minimal- und Maximalwert und durch Bestimmung der Lage der Spannungs- oder Stromverteilung der Endwiderstand ermittelt werden kann. Besonders eine bestimmte Resonanzmethode, bei der der Sender induktiv angekoppelt und der ebenfalls induktiv angekoppelte Empfänger an der die Leitungslänge variierenden Kurzschlußscheibe angebracht ist, war als vorteilhaft erkannt worden. Bei dieser Anordnung ist der reziproke Wert des Empfängerstromes in gleicher Weise längenabhängig wie die Spannungsverteilung, die bei der Abtastmethode gefunden wird. Diese Anordnung vereinigt alle Vorteile der Resonanz- mit denen der Abtastmethode.

Im Laufe der Untersuchungen über die dielektrischen Eigenschaften biologischer Körper und künstlicher ähnlich gebauter Stoffe hat der Verfasser eine Resonanzanordnung aufgebaut, die sich in ihren meßtechnischen Eigenschaften im Laufe der Untersuchungen gut bewährt hat und bei der alle Erwartungen und Schlußfolgerungen aus den in Kapitel II entwickelten theoretischen Vorstellungen verifiziert werden konnten. Die Anordnung wurde für Messungen im Wellenlängenbereich von 40 cm bis 3 m entwickelt und gestattet die Untersuchung fester und flüssiger Substanzen sowie die Bestimmung beliebig komplexer Widerstände. Es soll auf die Fragen eingegangen werden, die mit der richtigen Bestimmung der Resonanzkurvendaten verknüpft sind. Wie man aus diesen Daten Betrag und Phase des Reflexionskoeffizienten am Probeneingang bzw. am komplexen Widerstand ermittelt, ist in der oben erwähnten Theorie der Resonanzkurve bereits niedergelegt. Desgleichen wurde in einer weiteren Arbeit[2] über die zweckmäßigen Rechenmethoden berichtet, die es gestatten, aus dem Reflexionskoeffizienten auf die Materialkonstanten der untersuchten Substanzen zu schließen. Aus dem Vorgesagten ergibt sich, daß wir neben der Beschreibung der Anordnung uns mit allen den Gesichtspunkten beschäftigen werden, die man berücksichtigen muß, wenn man fehlerfrei die Resonanzkurve ausmessen will. Dazu gehört die Frage der einwandfreien Anbringung der zu bestimmenden Widerstände, die Erfassung des Fehlers, der durch Leitungshalterungen bedingt wird, die Frage der Vermeidung von Gleichtaktwellen, Störung durch zu starke Ankopplung von Sender und Empfänger usw.

2. Beschreibung der Meßleitung.

Die Meßleitung ist eine Doppeldrahtleitung in offener Ausführungsform. Die Drahtstärke beträgt 2 mm, der Abstand beider Drähte 15 mm. Die Einzelheiten der Anordnung werden zweckmäßig an Hand der Abbildungen erörtert. Das nicht zur

[1] Siehe Kapitel II.
[2] Siehe weiter unten Kapitel V.

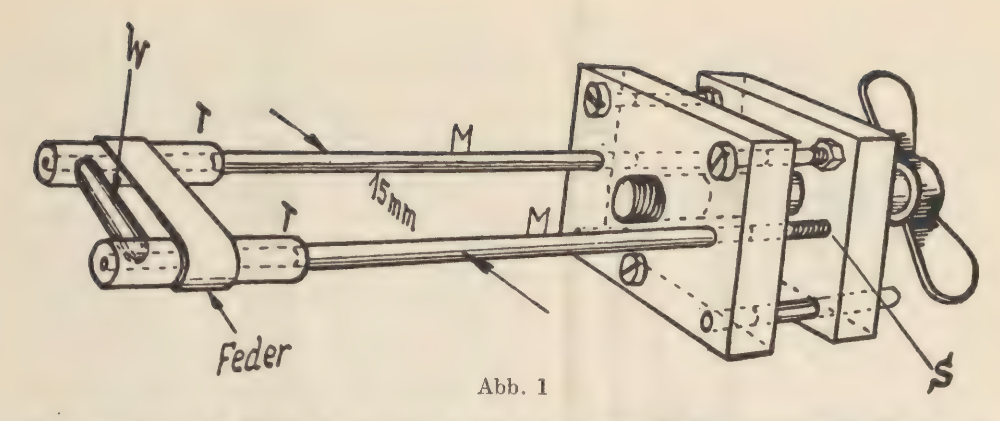


Abb. 1

Messung benutzte Ende der Leitung endet in einem Wellenwiderstand W. Damit wird erreicht, daß der jenseits der Kurzschlußbrücke K befindliche Leitungsteil sich nicht bei bestimmten Wellenlängen bzw. Einstellungen der Kurzschlußbrücke in Resonanz erregen kann, wenn, etwa infolge mangelhafter Beseitigung der Hochfrequenz in der Leitung vom Empfänger E zum Galvanometer G, eine Hochfrequenzwelle in diesem Leitungsteil induziert wird. In der Abb. 1 ist dieses Ende detaillierter dargestellt. Der Wellenwiderstand befindet sich in Form eines kleinen 15 mm langen Porzellankörpers mit leitender Bedeckung zwischen den etwas verdickten Leitungsenden, die in Trolitulstücken T eingebohrt sind. Sein Kontakt mit den Leitern wird erreicht durch eine Feder, die die Trolitulstücke und damit auch die Leiter zusammenpreßt. Die Trolitulstücke wiederum können über die zwei Messingstäbe M, die sie fortsetzen, jedes für sich mittels der Schrauben S nach dem Ende hingezogen werden. Auf diese Weise können Unterschiede in der Spannung der einzelnen Leiter ausgeglichen werden. Das Ganze kann mit der Flügelmutter angezogen werden, bis die Leitungsdrähte straff sind. Das andere Ende der Leiter wird durch eine Trolitulscheibe (Abb. 3) festgehalten. Die Durchführung der Leiter durch diese Scheibe muß so beschaffen sein, daß keine Reflexion am Anfang derselben stattfindet. Dies ist der Fall, wenn der Wellenwiderstand in der Halterung mit dem der Leitung übereinstimmt. Bekanntlich läßt sich das erreichen durch eine Verringerung des Leiterdurchmessers in der Halterung. Aus der Formel für den Wellenwiderstand einer Doppeldrahtleitung (a Abstand, r Radius der Leiter)

$$Z = \frac{120}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \frac{a}{r}$$

ergibt sich die folgende Bedingung für den Radius rH in der Halterung

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \frac{a}{r_H} = \ln \frac{a}{r} \cdot$$

Werden hierin die DK von Trolitul mit 2,5 und die Leitungsdaten $a = 15$ mm, $r = 1$ mm eingeführt, so folgt $r_H = 0{,}41$ mm. Dementsprechend besteht die Durchführung durch die Trolitulscheibe aus 0,4 mm starkem Stahldraht. Auf die Enden der beiden Drahtstücke sind je zwei Schräubchen hart aufgelötet, die 1,5 mm stark sind und in die 2 mm dicken Leiter eingeschraubt werden.

Eine große Schwierigkeit besteht in der Herstellung eines einwandfreien und doch leichtbeweglichen Kontaktes der Kurzschlußscheibe. Bekanntlich ist die Anbringung einer kapazitiven Vorschaltstrecke vor dem eigentlichen Kurzschluß günstig, da sie Schwankungen des Übergangswiderstandes an den Berührungsflächen mildert. Die Ausführung dieses Gedankens für konzentrische Leitungen ist in Abb. 4 skizziert. Die Schwierigkeiten, die sich bei dieser Ausführung zeigen, rühren daher, daß es nicht leicht ist, die einzelnen federnden Teile derWulste W gleichmäßig zum

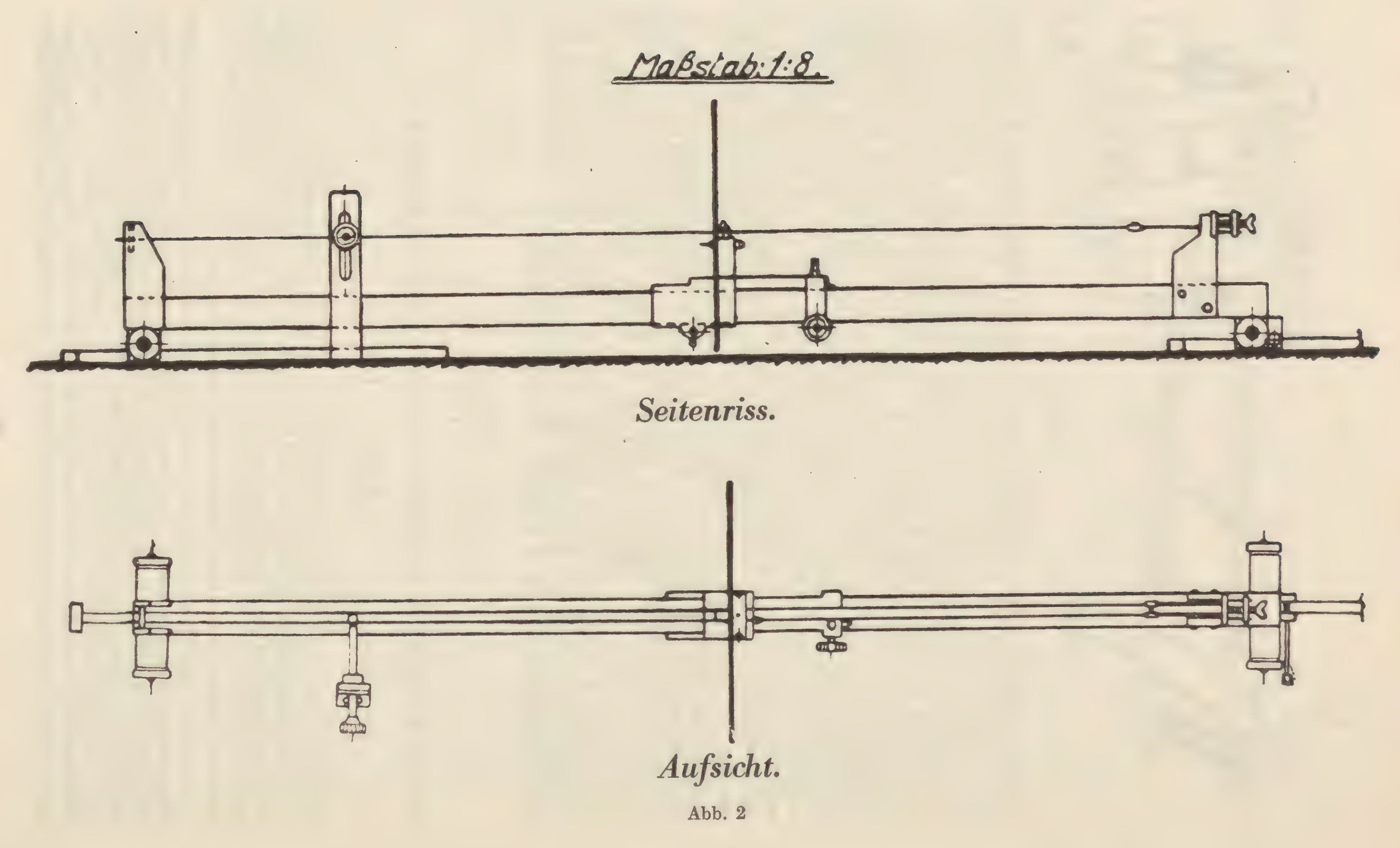


Abb. 2

Anliegen zu bringen. Bei der von uns aufgebauten Doppeldrahtleitung war die Ausführung eines guten Kurzschlusses leichter zu bewerkstelligen. In Abb. 5 ist der Kurzschluß dargestellt. Er besteht aus einer 40×40 cm großen Metallscheibe, die senkrecht zur Leitungsebene angeordnet ist und eine Kopplung des vom Sender erregten Teiles der Leitung zum Leitungsteil zwischen Wellenwiderstand und Kurzschluß verhindert. Diese Scheibe ist auf der unteren von zwei massiven Messingbacken aufmontiert. Die Messingbacken stellen eine Verbindung der Leiter mit äußerst geringer Induktivität dar und reduzieren somit die galvanische Kopplung zwischen den Leiterteilen vor und nach K auf ein Minimum. Während die untere Backe mit der Metallscheibe auf einem leichtbeweglichen Schlitten fest verbunden ist, kann sich die obere Backe,

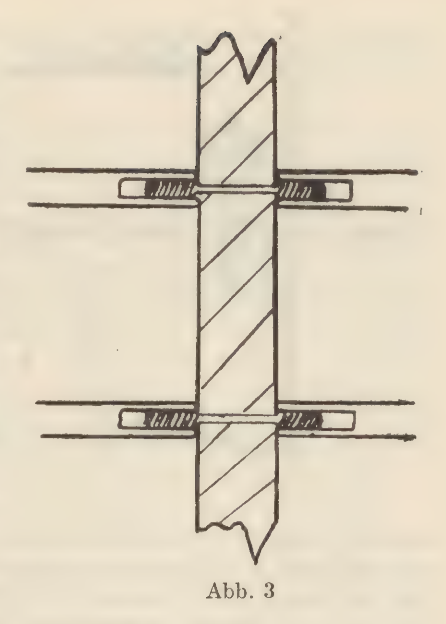


Abb. 3

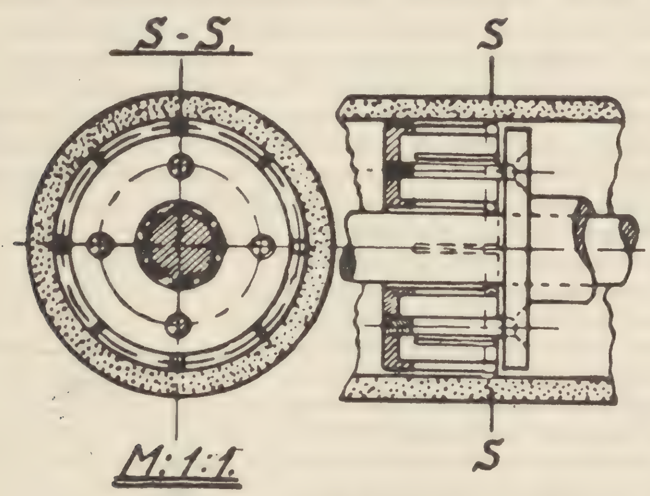


Abb. 4

durch einen Stift S_t geführt, in vertikaler Richtung bewegen. Sie wird mittels zweier Federn auf die zwischen beiden Backen befindlichen Leiter leicht angepreßt. Die einwandfreie Führung der Leitungsdrähte wird durch Rillen in den Backen erreicht, die ihren Querschnitt so ändern, daß den Kontaktstellen Kapazitäten vorgeschaltet sind.

Der Schlitten, der den Kurzschluß führt, rollt auf dem Träger der ganzen Anordnung, einem Holzbalken, und kann grob und fein mittels eines besonderen Radantriebes eingestellt werden. In den Balken ist ein mit besonderer Sorgfalt hergestellter Maßstab eingelegt, der mittels eines am Schlitten angebrachten Nonius die Stellung des Kurzschlusses auf 0,1 mm sauber zu bestimmen gestattet. An den beiden Balkenenden befinden sich Stützen, die die Trolitulhalterung und die Wellenwiderstandsanordnung in der skizzierten Weise festlegen.

Der Empfänger besteht aus einem kleinen Drahtbügel B, der auf die Kurzschlußscheibe 2 cm unterhalb der Leitungsdrähte aufgesteckt wird. Der eine Steckkontakt ist metallisch mit dem Kurzschluß verbunden, der andere ist isoliert und führt zu



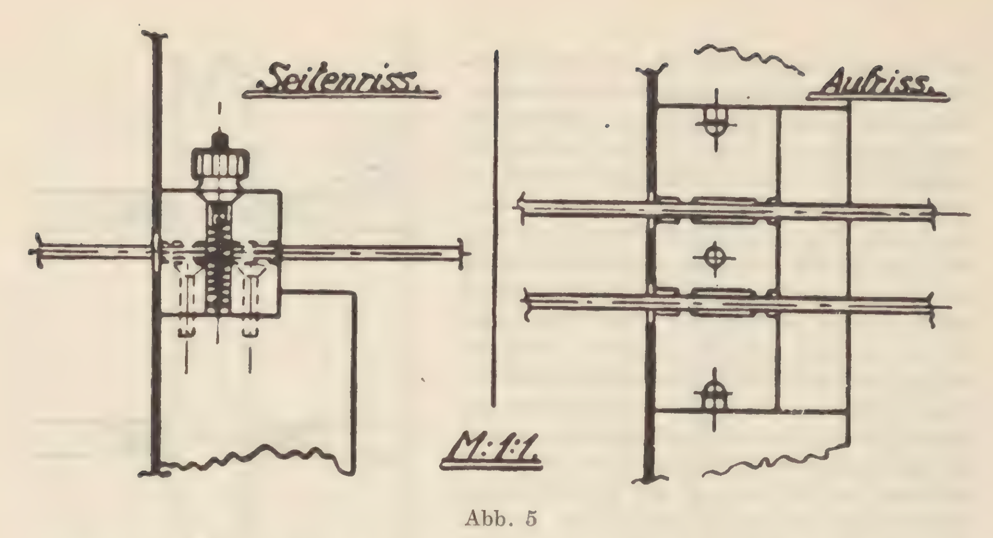


Abb. 5

einer Patrone *P*, die in den Schlitten so tief geschraubt wird, daß die Berührung mit dem isolierten Kontakt hergestellt ist. Die Patrone enthält einen Detektor *D* und eine Kapazität *C*, die von der Galvanometerzuleitung Hochfrequenz fernhalten soll. Es liegt somit die in Abb. 6 angegebene Gleichrichtung vor. Bei der Herstellung der Patronenkapazität war besonders zu beachten, daß die Zuleitungen derselben zur Masse und zum Detektor wegfallen müssen. Solche Zuleitungen hätten wegen ihrer wenn auch geringen Selbstinduktion den Hochfrequenzwiderstand der Kapazität bei den zur Verwendung kommenden hohen Frequenzen so erhöht, daß die Verblockung sinnlos geworden wäre. Die Verblockung wurde so durchgeführt, daß der stabförmige kleine Detektor[1] mit einem System von Zylindern innig umgeben wurde, die gegeneinander durch dünnes Ölpapier isoliert waren.

Der Drahtbügel, in dem die gleichzurichtende Hochfrequenzspannung induziert wird, kann gegen Bügel anderer geometrischer Abmessungen ausgewechselt werden. Auf diese Weise ist es möglich, die Kopplung des Empfängers und damit auch den Galvanometerausschlag zu verändern. Hierbei ist allerdings auf folgendes nachdrücklich hinzuweisen: Bekanntlich eliminiert man die Eigendämpfung der Leitung, indem man sie sich durch einen Widerstand verursacht denkt, der dem zu untersuchenden Objekt beigeschaltet ist, und der in einem „Leerversuch" ohne Objekt bestimmt wird. Dies Verfahren ist möglich, wenn der die Eigendämpfung der Leitung verursachend gedachte Widerstand nicht abhängig von den Betriebsdaten der Leitung ist. Bei zu starker Kopplung des Empfängers ist nun der Beitrag desselben zur gesamten Dämpfung der Leitung nicht mehr unerheblich. Da die Kennlinie des Gleichrichters aber nicht linear ist, folgt eine Abhängigkeit der Dämpfung vom Empfangsstrom. Damit wird die Durchführung eines Leerversuches zur Ermittlung der Eigendämpfung wegen des dann vorliegenden veränderten Erregungszustandes

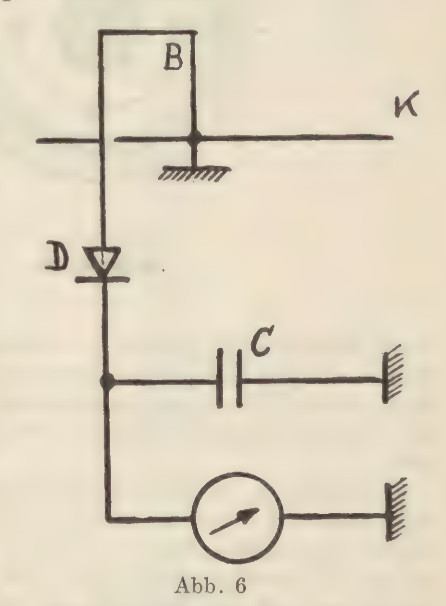


Abb. 6

[1] Für den verwandten Zweck waren besonders die Detektoren der Firma K. Maier, Eislingen, günstig.

der Leitung sinnlos. Es ist daher zu fordern, daß die Kopplung des Empfängers so gering ist, daß eine Beeinflussung der Eigendämpfung der Leitung nicht stattfindet.

Entsprechendes gilt für den Sender: Wird die Kurzschlußbrücke zwecks Erfassung der Resonanzkurvenbreite und -höhe verschoben, so ändert sich damit auch die durch den Kurzschluß festgelegte Stromverteilung zwischen diesem und der Senderkopplung. Dies hat zur Folge, daß die Senderankopplung an verschiedenen Stellen dieser Stromverteilung erfolgt und somit verschieden stark ist. Mit der Stärke der Ankopplung wiederum ändert sich der durch den Sender in die Leitung eininduzierte Dämpfungsanteil. Aus den oben bereits besprochenen Gründen ist dafür zu sorgen, daß dieser nicht konstante Anteil an der Gesamtdämpfung so klein ist, daß er jene nicht merklich beeinflußt. Daher darf die Senderankopplung nicht zu stark sein. Wir haben experimentell die Kopplung so lange verringert, bis keine Abhängigkeit der Gesamtdämpfung (gemessen durch die Resonanzkurvenbreite) von der Stärke der Kopplung mehr vorlag und trotzdem eine ausreichend kräftige Erregung der Leitung stattfand. Dabei war noch etwas zu berücksichtigen: Die bereits oben erwähnte Theorie liefert einfache Ergebnisse für den Fall rein induktiver Kopplung. Aus diesem Grunde mußten wir eine kapazitive oder gemischt induktiv-kapazitive Kopplung vermeiden. Eine solche liegt aber immer dann vor, wenn die Länge des Drahtes der Koppelschleife nicht klein gegen $\lambda/4$ ist, da sich im Gegenfalle zwischen den Enden der Schleife bereits eine merkliche Spannung befindet, die kapazitiv die Leitung erregt. Für uns bedeutet dies, daß die Schleife aus einem Draht gebogen sein muß, der weniger lang als 10 cm ist bzw. daß der Radius einer kreisförmig gebogenen Schleife kleiner als 1,3 cm sein muß. Welche Möglichkeit besteht nun festzustellen, ob die Kopplung tatsächlich rein induktiver Art ist? In der erstzitierten Arbeit wurde gezeigt, daß bei rein induktiver Kopplung das Resonanzmaximum seinen optimalen Wert erreicht, wenn die Entfernung zwischen Kurzschlußbrücke und Ort der Ankopplung ein ganzzahliges Vielfaches von $\lambda/2$ beträgt, d. h. wenn in einem Bauch der Stromverteilung gekoppelt wird. Rein kapazitive Kopplung liefert den optimalen Resonanzwert bei einem Abstand von $(2\,n + 1)\,\lambda/4$, also bei Kopplung in einem Bauch der Spannungsverteilung. Liegt der optimale Resonanzwert zwischen diesen Stellen vor, so hat man eine gemischte Kopplung. Um den Ort optimaler Kopplung ermitteln zu können, muß man den Ort der Senderankopplung S verschieben, ohne den Strom in der Koppelschleife zu ändern. Dies wurde von uns in der Weise durchgeführt, daß der Balken, auf dem die Leitung befestigt ist, auf Rollen montiert wurde. Die Senderkopplung S dagegen ist horizontal unverrückbar angebracht. Bei dieser Anordnung erfährt die Zuleitung vom Generator zur Schleife S keine Änderung ihrer Lage und die Forderung konstanten Stromes in S ist daher erfüllt. Die ersten Versuche mit größeren Koppelspulen ergaben die optimale Erregung an einer um etwa $\lambda/8$ gegen den geforderten Ort verlagerten Stelle. Durch Verkleinerung der Schleife gelang es dann sehr bald, die gewünschte rein induktive Kopplung zu erzielen. Bei der endgültigen Ausführung kann die Koppelschleife durch vertikale Verstellung auf zweckmäßigen Abstand von der Leitung gebracht werden. Die Schleife hat einen Durchmesser von nur 1,5 cm und ist kreisförmig gebogen. Mit ihren Enden ist sie an ein konzentrisches Leitungsstück angelötet. Von der konzentrischen Leitung geht es über eine ebenfalls konzentrisch ausgeführte Abstimmleitung und ein Kabel zum Hochfrequenzgenerator. Mit Hilfe der Abstimmleitung, deren Länge durch einen Posaunenzug variiert werden kann, wird die gesamte Leitung vom Sender zur Schleife S auf Resonanz abgestimmt und damit eine wesentliche Erhöhung der Energiezufuhr zur Lecherleitung erzielt. Bei zu starker Kopplung des Senders mit dieser Abstimmleitung bilden beide ein eng gekoppeltes System zweier Kreise. Infolgedessen ist dann die Resonanz, die man bei Variation der Abstimmleitung erhält, nicht mehr eindeutig, sondern durch eine Kurve mit zwei Maxima ersetzt. Bekanntlich erreicht der Sekundärstrom eines gekoppelten

Systems große Werte, wenn die Kopplung so lose gestaltet wird, daß die beiden erwähnten Maxima sich zu einem vereinigen. Wir haben daher bei unsererAnordnung zwischen den Sender (Type *SLD* der Firma *PTE.*) und die Abstimmleitung eine variable Kapazität geschaltet, mit deren Hilfe die Gestalt der sekundären Resonanzkurve günstig geformt wird. Die ganze Anordnung geht aus der Abb. 7 hervor. Der Sender befindet sich in halber Höhe unter der Tischplatte, auf der die Leitung angebracht ist. An der Vorderseite des Tisches, unter der Leitung, ist der Posaunenzug so angebracht, daß er und die Leitung von einem Platz aus bedient werden können. Von diesem Platz aus werden also Galvanometerablesung, Kurzschlußeinstellung und Einstellung optimaler Erregung durch Verschieben der Leitung vorgenommen.

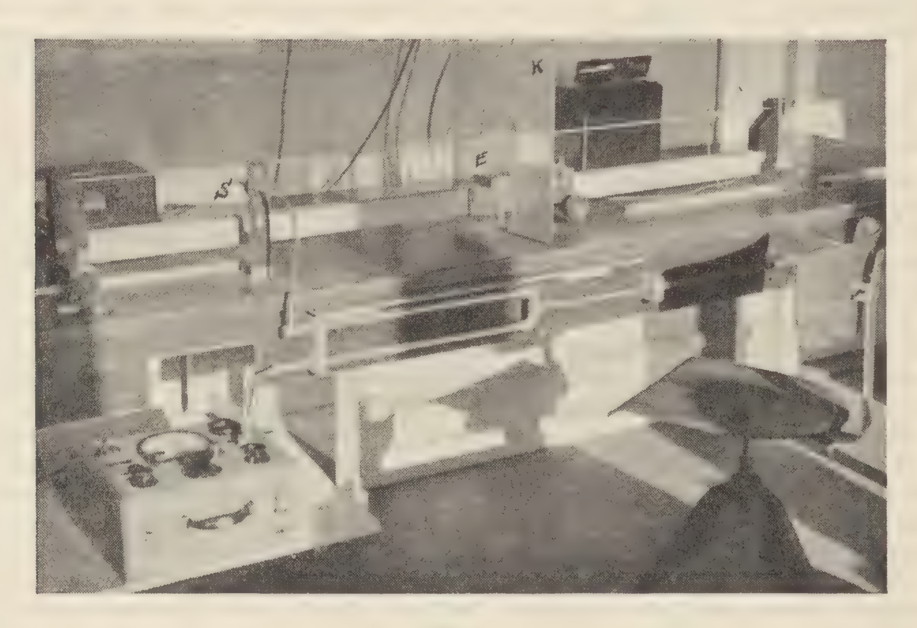


Abb. 7

Infolge des geringen Abstandes beider Leiter ist die Abstrahlung trotz der offenen Bauweise gering. Die durch sie bedingten Verluste und die ohmschen Verluste in den Leitern sind zusammen bei einer Leitungslänge von 1,5 m etwa gleich groß wie die Verluste in der Halterung am Leitungsende. Die vielfach anzutreffende offene Ausführung mit dickeren Leitern und größerem Abstand ist nicht vorteilhaft, da die gegenüber unserer Ausführung vorliegende Verringerung der ohmschen Verluste mehr als wettgemacht wird durch die wesentlich größere Abstrahlung. Diese letztere aber ist besonders unangenehm, da sie eine unter Umständen nicht unerhebliche Empfindlichkeit der Anordnung gegen äußere Einflüsse bedingt. Bei unserer Anordnung war bei allen Wellenlängen der störende Einfluß des Bedienungspersonals so gering, daß zusätzliche Abschirmungsmaßnahmen desselben sich erübrigten.

Der geringe Drahtabstand hat einen weiteren Vorteil: Infolge des wenig ausgreifenden Feldes ist die Gefahr der Erregung beider Leiter gegen Erde oder einen sonstigen dritten Leiter gering. Die Erregung einer solchen „Gleichtaktwelle" ist ohnehin nicht sehr zu befürchten, da die Resonanzabstimmung der Leitung eventuelle Gleichtaktwellen stark benachteiligt. Hierin ist ein weiterer Vorteil der Resonanzmethode zu erblicken. Wir haben bei unserer Anordnung keinen Hinweis auf die Existenz einer Gleichtaktwelle erhalten können.

Den Leiterabstand andererseits noch mehr zu verringern als es bei der von uns aufgebauten Anordnung der Fall ist, ist nicht nur unnötig, sondern auch unzweckmäßig, da die Anfertigung gut sitzender Probenstücke und die einwandfreie Führung der Kurzschlußbrücke dann zunehmend Schwierigkeiten bereitet.

3. Vergleich der Anordnung mit einer konzentrischen Leitung, die nach dem Abtastverfahren Messungen gestattet.

Auf die Vorteile der Resonanzmethode gegenüber der ,,Abtastmethode" wurde bereits oben eingegangen. Die erörterten Vorteile ergaben sich aus Unterschieden in der Meßmethode. Hier wollen wir auf Dinge, die mit dem Aufbau der Leitung zusammenhängen, eingehen. Eine Leitung, die nach dem Abtastverfahren arbeitet, muß notwendigerweise konzentrisch ausgeführt werden. Im Gegenfalle bedingt die mögliche Störung durch das Abtastorgan und dessen Schaltung und vor allem das Auftreten von Hochfrequenz in der vom Abtastorgan fortführenden Stromleitung zum Galvanometer große Unannehmlichkeiten. Die Freihaltung dieser Galvanometerzuleitung von unerwünschten Strömen ist deshalb wesentlich schwieriger als bei der oben beschriebenen Resonanzanordnung, weil sie ihrer Aufgabe gemäß nicht nur bis zum Ende der Meßleitung, sondern zum Punkt der Spannungsabnahme geführt werden muß.

Eine konzentrisch aufgebaute Leitung bedingt einen wesentlich größeren mechanischen Aufwand als die beschriebene Anordnung. Sie erfordert größte Präzision vor allem in der Führung des Abtastorganes und in der Wahrung überall gleichen Abstandes desselben vom Innenleiter. Aus diesem Grunde muß eine konzentrische Leitung, die in dem uns interessierenden Wellenlängengebiet von 40 cm bis 2 m Messungen gestattet, also mindestens 1,2 m lang ist, über zahlreiche Halterungen des Innenleiters verfügen. Die einwandfreie Herstellung solcher Halterungen ist mit viel Arbeit verbunden und sehr schwierig. Die Erfassung der durch sie bedingten Störungen ist ebenfalls kompliziert. Die von uns aufgebaute Leitung verfügt über nur eine Halterung. Sie ist am Leitungsende angebracht. Die durch sie verursachte Störung im Falle eines nicht ganz exakten Wellenwiderstandsabgleiches ist daher relativ einfach zu übersehen, wie an anderer Stelle ausgeführt wurde[1].

Die Erzielung eines längs der ganzen Leitung überall gleichen Wellenwiderstandes stellt dagegen kein Problem dar. Sie wird bei unsererAnordnung durch die Spannung, unter der die Leiter stehen, erreicht. Hier erweist sich die Verwendung relativ dünner Leiter als günstig, da stärkere Drähte schwerer zu strecken sind. Bei konzentrischen Anordnungen interessiert der Einfluß einer geringen exzentrischen Lage des Innenleiters und der Einfluß des für die Abtastung der Wellenverteilung erforderlichen Längsschlitzes auf den Wellenwiderstand. In den folgenden beiden Tabellen sind diesbezügliche experimentelle Untersuchungen niedergelegt, die an einer konzentrischen Anordnung mit üblichen Daten mit $r_a = 30$ mm und $r_i = 10$ mm vorgenommen wurden. Der Wellenwiderstand wurde durch Bestimmung der Selbstinduktion pro Längeneinheit mit dem L-Meßgerät der Firma *PTE* nach der Formel $Z = cL$ bestimmt (c Lichtgeschwindigkeit, L Selbstinduktion pro Längeneinheit). Kontrollversuche mittels C-Messung nach der Formel $Z = 1/cC$ erbrachten gleiche Ergebnisse. Aus den Werten ergibt sich zweierlei: 1. Ein Durchhang des Innenleiters von 1 bis 2 mm ändert Z um nicht mehr als 1 %. Die Abweichung des Innenleiters von der konzentrischen Lage beeinflußt also den Wellenwiderstand nicht stark. 2. Der Einfluß des Schlitzes auf Z bei den üblichen Breiten von 2 bis 3 mm beträgt etwa 4 %. Interessant ist, daß dieser Einfluß bereits bei geringer Breite vorliegt und sich mit ansteigender Breite nur schwach verändert. Wenn man also schon schlitzen muß, so ist es fast gleichgültig, wie breit der Schlitz gewählt wird. Zusammenfassend folgt

[1] Siehe Kapitel IV.

Einfluß der Exzentrizität auf Z	
Abw. d. Innlt. v. d. konz. Lage	Z
0 mm	66 Ω
1	66
2	65
3	64
4	62
5	59
6	56
7	50
8	42

Einfluß des Schlitzes auf Z	
Schlitzbreite	Z
0 mm	66
1,2	67
2,3	68
3,4	69
4,5	69
6,6	69

hieraus: Eine Anordnung kann mit so wenig Halterungen auskommen, daß ein schwacher Durchhang des Innenleiters vorliegt, wenn kein Abtastorgan längs des Innenleiters geführt wird. Die Abtastung und der dazu erforderliche unangenehmere Schlitz kommen aber bei einer konzentrischen Resonanzanordnung in Fortfall. Will man also eine Leitung geschlossen aufbauen, so sprechen die vorgebrachten Gründe ebenfalls für eine Resonanzanordnung ohne Schlitz mit wenig Halterungen.

Bei einer konzentrischen Anordnung muß man das Ende der Leitung bekanntlich mit einer $\lambda/4$ langen, ihrerseits am Ende kurzgeschlossenen Leitung abschließen, wenn man einen einwandfrei zu den Leitern senkrechten Feldverlauf sichern will. Wie groß ist die Störung, die entsteht, wenn diese Zusatzleitung nicht genau $\lambda/4$-Länge hat? Da man die Dämpfung der $\lambda/4$-Leitung vernachlässigen darf, ist ihr Eingangswiderstand imaginär. Ist l die Länge dieser Leitung, so gilt für ihn:

$$\mathfrak{R} = j\,Z\,\mathrm{tg}\,2\pi\frac{l}{\lambda} = \frac{1}{j\,\omega\,C}.$$

Die durch diese Gleichung definierte Kapazität C würde, an Stelle der $\lambda/4$-Leitung angebracht, die Meßleitung genau so wie diese belasten. Wir wollen die Kapazität C mit der durch eine über das Ende der Meßleitung geschobenen Materialprobe der Dielektrizitätskonstanten ε und der Dicke d bedingten Kapazität C_p vergleichen. Wird mit C_L die Kapazität der Leitung pro Längeneinheit bezeichnet, so gilt offenbar

$$C_p = \varepsilon\,d\,C_L.$$

Da andererseits bekanntlich $Z = 1/cC_L$ erfüllt ist, folgt hieraus

$$Z = \frac{1}{c}\,\frac{\varepsilon\,d}{C_p}$$

und somit aus der obigen Beziehung für $\mathfrak{R}$

$$\frac{1}{\omega\,C} = -\frac{1}{c}\,\frac{\varepsilon\,d}{C_p}\,\mathrm{tg}\,2\pi\frac{l}{\lambda}.$$

Wird hierin die Länge l der $\lambda/4$-Leitung durch die Abweichung $x = \frac{\lambda}{4} - l$ der Größe l von $\lambda/4$ eingeführt, so erhält man

$$\frac{C}{C_p} = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\lambda}{2\pi\,d}\,\mathrm{tg}\,2\pi\frac{x}{\lambda}.$$

Beschränken wir uns weiter auf den praktisch wichtigen Fall kleiner Verstimmungen gegen $\lambda/4$, so geht dies über in

$$\frac{C}{C_p} = \frac{x}{\varepsilon d}.$$

Da die durch nicht exakte Einstellung der $\lambda/4$-Leitung an die Meßleitung angelieferte Kapazität C der Probenkapazität C_p parallel geschaltet zu denken ist, gibt der Quotient C/C_p direkt den durch Verstimmung der $\lambda/4$-Leitung bedingten Relativfehler, der bei der C_p-Bestimmung entsteht, an. Er wird groß bei sehr dünnen Proben. Wird z. B. ein leitendes Papier der *DK* 10 und der Dicke 0,1 mm untersucht, so wird die Kapazität dieses Papieres und damit auch dessen *DK* um 100 % falsch bestimmt, wenn die $\lambda/4$-Leitung nach Anbringung der Probe um 1 mm falsch eingestellt wird. Daraus folgt: Die exakte Einstellung der $\lambda/4$-Leitung ist umso wichtiger, je dünner die untersuchte Probe ist.

Ein Vorteil der von uns aufgebauten Leitung besteht darin, daß auf die Anbringung eines $\lambda/4$-Abschlusses bei Leerlaufmessungen verzichtet werden kann, da das Streufeld am Ende der dünnen Leiter viel geringer ist als das bei einer konzentrischen Anordnung mit offenem Ende der Fall wäre. In guter Näherung läßt es sich erfassen, wenn man annimmt, daß die Leiterdrähte mit zwei Halbkugeln abschließen und deren Feld berechnet. Die Kapazität einer Kugel mit dem Radius 1 mm im unendlichen Raum ist $C = 0{,}1$ cm, die Kapazität zweier solcher Kugeln in unendlich großem Abstand also $C = 0{,}05$ cm. Dieser Wert ist kleiner als der von zwei Kugeln im Abstand von 15 mm. Zu einer oberen Grenze C für die Kapazität letzterer gelangt man, wenn man die beiden Kugeln mit 1 mm Radius mit zwei Kugelschalen, deren Radius gleich dem halben Leiterabstand ist, umgibt. Diese beiden Kugelschalen werden sich dann genau in der Mitte zwischen den Leitern berühren müssen. Die Kapazität dieser Anordnung ergibt sich zu

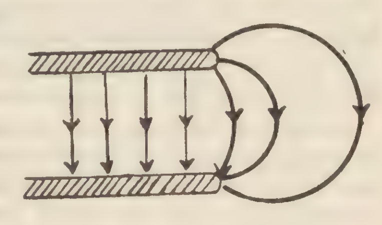


Abb. 8

$$C = \frac{1}{2}\,\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} = \frac{1}{2}\,\frac{0{,}75}{0{,}65} = 0{,}058 \text{ cm}.$$

Die Kapazität zweier Kugeln mit $r = 1$ mm und $a = 15$ mm liegt also zwischen 0,5 und 0,58 mm, die zweier Halbkugeln zwischen den halben Werten 0,25 und 0,29 mm. Die Kapazität der Doppeldrahtleitung pro Längeneinheit 1 mm hat den Wert

$$C_L = \frac{0{,}1}{4 \ln \frac{a}{r}} = \frac{0{,}1}{9{,}2 \cdot 1{,}176} = 0{,}0092 \text{ cm}.$$

Das Streufeld am Ende unserer Leitung kann also dargestellt werden durch eine Verlängerung derselben um 2,7 bis 3,2 mm.

Die Streuzusatzkapazität von etwa 0,3 mm liegt mit und ohne Probe vor. Damit ist eine andere Situation gegeben als bei der Diskussion der falsch eingestellten $\lambda/4$-Leitung. Die dort abgeleitete Fehlerformel galt für den Fall, daß ohne Probe richtig, mit Probe eine falsche Einstellung der $\lambda/4$-Leitung gegeben ist. Der Fehler, den man begeht, wenn man ständig die Leitung mit einer Kapazität belastet, ohne diese bei der Auswertung zu berücksichtigen, ist kleiner. Seine Bestimmung ist identisch mit dem Problem des Einflusses der am Leitungsende angebrachten Halterung. Die Diskussion dieses Problemes folgt in Abschnitt V. Dort werden wir uns daher auch wieder der Frage nach dem quantitativen Einfluß des Streufeldes zuwenden.

4. Fragen der Probenanbringung.

Wir wollen jetzt die Probleme behandeln, die bei Materialuntersuchungen mit der Anbringung der zu untersuchenden Probe an die Leitung verbunden sind. Die nächstliegende und meist gebräuchliche Art der Anbringung besteht darin, daß das Ende der Leitung vom Material möglichst gut umgeben wird. Außerdem kann man so verfahren, daß die zu untersuchende Substanz in einen kleinen Kondensator eingefüllt und dieser Kondensator an das Leitungsende angeschlossen wird. Bei der letzteren Methode sind die magnetischen Stoffkonstanten schwer erfaßbar, da deren Ermittlung den einwandfreien Kurzschluß am Ende der Probe erfordert. Dieser jedoch ist bei der erstgenannten Methodik so viel leichter als bei einem Kondensator zu bewerkstelligen, daß die Kondensatormethode nur für die Untersuchung „rein dielektrischer" Proben ($\mu = 1$, $\operatorname{tg} \vartheta_\mu = 0$) zur Anwendung kommen sollte. Wir wollen ihr einen besonderen Abschnitt widmen und uns hier mit den Problemen beschäftigen, die bei der erstgenannten Art der Probenanbringung durch Überschieben des Materials über das Leitungsende entstehen.

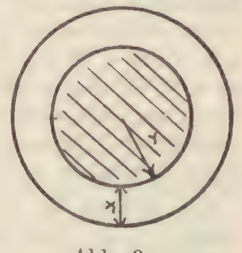


Abb. 9

Sowohl bei Leitungen in offener als auch geschlossener Bauform wird ein Fehler in der Angabe der Konstanten durch unvollkommenen Sitz bedingt. Es sei zunächst der Fehler bei DK-Bestimmungen an der Doppeldrahtleitung berechnet. Vorausgesetzt werde, daß die durch unvollkommenen Sitz bedingten Luftlöcher konzentrisch beide Leiter umgeben. Dann liegt mit der Kapazität bei einwandfreiem Sitz auf Leitern der Dicke $r + x$

$$C_1 = \frac{\varepsilon d}{4 \ln \dfrac{u}{r + x}}$$

die Kapazität der Luftpolster beider Leiter

$$C_2 = \frac{d}{2 \ln \dfrac{r + x}{r}}$$

in Reihe geschaltet vor:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{2}{C_2}.$$

Unter Vernachlässigung des Luftpolsters würde man auf eine falsche DK ε' schließen gemäß der Gleichung:

$$C = \frac{\varepsilon' d}{4 \ln \dfrac{a}{r}}.$$

Zusammenfassung dieser Beziehungen führt zu

$$\frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{a}{r + x} + \ln \frac{r + x}{r} = \frac{1}{\varepsilon'} \ln \frac{a}{r}. \tag{4a}$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = 1 + (\varepsilon - 1) \frac{\ln \left(1 + \dfrac{x}{r}\right)}{\ln \dfrac{a}{r}}.$$

Hierin wird zweckmäßig der Relativfehler der Größe ε' eingeführt. Er ist definiert durch

$$\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - 1.$$

Man erhält dann

$$\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon'} = (\varepsilon - 1)\,\frac{\ln\left(1+\frac{x}{r}\right)}{\ln\frac{a}{r}} \sim (\varepsilon - 1)\,\frac{\frac{x}{r}}{\ln\frac{a}{r}}. \tag{4b}$$

Der Relativfehler bei *DK*-Bestimmungen ist also proportional $\varepsilon - 1$ und, wenigstens bei nicht zu großem Luftpolster, auch proportional zu x/r. Die Löcher in den Proben sind also umso sorgfältiger herzustellen, je größer die *DK* ist.

Bei der Rechnung wurde eine konzentrische Lage der Leiter in den Probenlöchern vorausgesetzt. In Wirklichkeit werden die Leiter meist an einem Rand der Probenlöcher exzentrisch anliegen. Man wird vermuten, daß dadurch die abgeleitete Beziehung keine allzugroße Korrektur erfährt. Zur Bestätigung dessen haben wir Messungen mit Igelitproben durchgeführt und die obenstehenden Ergebnisse für ε' erhalten. Der Vergleich mit den ebenfalls angegebenen theoretisch aus Gleichung (4a) ermittelten Werten zeigt, daß, wenn von einer Messungenauigkeit von nicht ganz 1 % abgesehen wird, bis zu etwa $x = 0{,}2$ mm Übereinstimmung der experimentell und theoretisch bestimmten ε'-Werte vorliegt. Für größere x-Werte liefert die Theorie etwas zu große Werte. Hieraus wird man schließen, daß die Exzentrizität zu einer geringen Verringerung des Lochfehlers führt.

x (mm)	ε' (Exp.)	ε' (Theorie)
0	2,74	2,74
0 05	2,68	2,66
0,1	2,58	2,58
0,15	2,56	2,53
0,2	2,45	2,47
0,3	2,34	2,39
0,4	2,25	2,31
0,5	2,17	2,26

Wir wollen nunmehr den berechneten Fehler (4b) mit dem bei einer konzentrischen Anordnung vorliegenden vergleichen. Die Radien der konzentrischen Leiter seien mit r_i bzw. r_a und die Abstände der Probe von diesen mit x_i bzw. x_a bezeichnet. Für den Fehler der konzentrischen Leitung folgt nach einer entsprechend der bereits durchgeführten Rechnung verlaufenden Überlegung

$$\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{r_a - x_a}{r_i - x_i} + \ln\frac{r_a}{r_a - x_a} + \ln\frac{r_i + x_i}{r_i} = \frac{1}{\varepsilon'}\ln\frac{r_a}{r_i}$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \varepsilon - (\varepsilon - 1)\,\frac{\ln\frac{r_a - x_a}{r_i + x_i}}{\ln\frac{r_a}{r_i}} = 1 + (\varepsilon - 1)\,\frac{\ln\frac{r_a}{r_i} - \ln\frac{r_a - x_a}{r_i + x_i}}{\ln\frac{r_a}{r_i}}$$

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon'} = (\varepsilon - 1)\,\frac{\ln\left(1+\frac{x_i}{r_i}\right) - \ln\left(1-\frac{x_a}{r_a}\right)}{\ln\frac{r_a}{r_i}} \sim (\varepsilon - 1)\,\frac{\frac{x_i}{r_i} + \frac{x_a}{r_a}}{\ln\frac{r_a}{r_x}}. \tag{4c}$$

Der Vergleich der Beziehungen (4b) und (4c) zeigt, daß bei einwandfreiem Sitz der Probe im Außenleiter der konzentrischen Leitung ($x_a = 0$) die beiden Leitungsarten denselben Fehler bedingen, wenn bei gleich dickem Luftpolster $r_i \ln r_a/r_i = r \ln a/r$ gilt. Da die Funktion $r \ln a/r$ nicht stark r-abhängig ist, ist der *DK*-Fehler bei den in Betracht kommenden Werten nicht sehr von den geometrischen Abmessungen abhängig. So kommt es, daß bei unserer Doppeldrahtleitung trotz

ihrer dünnen Leiter der Fehler nicht mehr als etwa doppelt so groß ist wie bei einer konzentrischen Leitung mit einem Verhältnis r_a/r_i von ungefähr drei.

Aus der Gleichung (4b) folgt, daß bei großen *DK*-Werten die Proben einwandfrei auf den Leitern sitzen müssen, wenn Fehlbestimmungen vermieden werden sollen. Ein genügend einwandfreier Sitz ist nun vor allem bei Wiederholungsmessungen nicht immer gewährleistet. Es sei daher auf die Möglichkeit aufmerksam gemacht, den diskutierten Fehler durch gespreizte Endstücke der Leiter zu verkleinern. Infolge der Spreizung liegen die Leiterteile federnd an den Rändern der Probenlöcher an. Der Kontakt ist also gewährleistet. Dafür entsteht ein anderer Fehler, auf den kurz eingegangen werden soll. Beschränken wir uns auf den Fall dünner Proben, die nichtleitend sind, so gilt bekanntlich[1]

$$Z_L \, \omega \, C = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda},$$

wenn mit Z_L der Wellenwiderstand der Meßleitung bezeichnet wird und l die Lagenänderung des Kurzschlusses gegenüber dem Fall ohne Probe ist. Weiterhin folgt aus der Beziehung $C = \frac{\varepsilon d}{4 \ln {}^a/_{r+x}}$ und der Gleichung für den Wellenwiderstand der Leiter am Ende der Leitung $Z_a = 120 \ln {}^a/_{r+x}$ die Formel

$$C = \frac{30 \, \varepsilon \, d}{Z_a}.$$

Fassen wir die Beziehungen für Z_L und Z_a zusammen, so folgt

$$\varepsilon = \frac{30\, d}{\omega} \frac{Z_a}{Z_L} \cdot \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}.$$

Die *DK* ist hiernach proportional dem Verhältnis Z_a/Z_L. Wird die Spreizung der Abschlußleiterteile nicht berücksichtigt, so begeht man daher einen Fehler um diesen Faktor. Wir wollen diesen Faktor durch die Leiterdimensionen ausdrücken. Da die falsche *DK* ε' durch $30\, d/\omega \operatorname{tg} 2\pi\, l/\lambda$ gegeben ist, folgt

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{Z_a}{Z_L} = \frac{\ln \frac{a}{r+x}}{\ln \frac{a}{r}} = \frac{\ln \frac{a}{r} - \ln \frac{r+x}{r}}{\ln \frac{a}{r}} = 1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{r}\right)}{\ln \frac{a}{r}}.$$

Der Relativfehler, den man begeht, wenn die Wellenwiderstandsänderung nicht berücksichtigt wird, hat somit den Wert

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon'} = - \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{r}\right)}{\ln \frac{a}{r}} \sim - \frac{\frac{x}{r}}{\ln \frac{a}{r}}. \tag{4d}$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Gleichung (4b), so folgt: Der Betrag des „Spreizfehlers" ist um den Faktor $\varepsilon - 1$ kleiner als der „Lochfehler" und hat entgegengesetztes Vorzeichen. Die Spreizungen der Endleiter empfehlen sich daher unbedingt. Bei unserer Leiteranordnung speziell folgt (x in mm!)

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{x}{\ln 15} = \frac{x}{2{,}7}.$$

[1] Siehe z. B. bei P. Drude, Wiedemanns Annalen 61, [1897].

Der Fehler ist hiernach kleiner als 10 %, wenn $x < 0{,}27$ mm gilt bzw. der Lochdurchmesser auf wenigstens $^1/_2$ mm genau hergestellt ist.

Bei den vorstehenden Erörterungen wurde speziell der Fehler, der bei der *DK*-Bestimmung entstehen kann, berechnet. Dabei wurde keine ohmsche Leitfähigkeit der Probe angenommen und diese dünn vorausgesetzt. Durch analoge Überlegungen gelangt man zu gleichen Ergebnissen bezüglich des Fehlers, der bei der Leitfähigkeitsbestimmung stark leitender dünner Proben begangen wird. Ist die Probe nicht mehr so dünn, daß der Eingangsleitwert der Probe proportional zur *DK* bzw. ohmschen Leitfähigkeit angesetzt werden darf oder wird diese Proportionalität durch einen komplexen Charakter des betrachteten Eingangsleitwertes gestört, so lassen sich nicht mehr so einfache Ergebnisse gewinnen. Indessen können die abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten in den meisten vorliegenden Fällen wenigstens zur Abschätzung der zu erwartenden Fehlergrößenordnung herangezogen werden.

Eine weitere Frage ist die nach dem Einfluß des Probendurchmessers auf die Meßresultate. Streng genommen greift das elektrische Feld unendlich weit in den die Doppelleitung umgebenden Raum. Da alle numerischen Auswerteverfahren voraussetzen, daß die am Leitungsende angebrachte Probe das gesamte Feld zwischen den Leitern längs des von der Probe bedeckten Leitungsstückes enthält, müßten die Proben möglichst groß dimensioniert werden. Indessen läßt der geringe Abstand der beiden dünnen Leiter vermuten, daß man hier nicht zu hohe Anforderungen an die Probengröße stellen muß. Wir haben auch diese Frage experimentell untersucht. Es wurde die scheinbare *DK* von kreisförmigen Igelitscheiben verschiedenen Durchmessers bei einer Wellenlänge von 1,5 m bestimmt. Das Ergebnis ist in der nebenstehenden Tabelle niedergelegt. Man sieht, daß die scheinbare *DK* mit wachsendem Probendurchmesser sich asymptotisch einem Grenzwert, der wirklichen *DK*, nähert. Dieser Grenzwert wird von 5 cm großen Proben bereits um weniger als 1 % genau angenähert. Wir haben daher bei unseren Messungen alle zu untersuchenden Materialien mit einem Durchmesser von 6 bis 8 cm angefertigt und dies als genügend erachtet.

Durchmesser	DK
2 cm	2,37
3	2,66
4	2,72
5	2,78
6	2,79
8	2,80

Bezüglich der Probenanbringung ist also festzustellen:

1. Der durch nicht exakte mechanische Anpassung der Proben bedingte Fehler kann beträchtlich sein. Er ist proportional $\varepsilon - 1$ und daher vor allem bei Substanzen großer *DK* groß.

2. Ein Vergleich der durch experimentelle Nachprüfung gut betätigten Formel für den durch zu große Probenlöcher bedingten *DK*-Fehler mit der entsprechenden Beziehung für eine konzentrische Leitung mit relativ dickem Innenleiter zeigt, daß die Verdickung der Leiter den Fehler nicht erheblich vermindert.

3. Spreizt man die Leitungsenden so lange, bis die Probe fest auf der Leitung sitzt, so ist der durch die Änderung von Z bedingte Fehler um den Faktor $\varepsilon - 1$ kleiner als bei nicht erfolgter Spreizung.

4. Es genügt, den Proben einen äußeren Durchmesser von 6 bis 8 cm zu geben.

5. Der Einfluß der Halterung auf die Meßergebnisse.

Die in Abschnitt 2 dieses Kapitels beschriebene Trolitulhalterung der Leitung kann in ihrem Verhalten auf die Wellenverteilung durch eine Kapazität ersetzt werden, die dem am Ende der Leitung angeschlossenen komplexen Widerstand parallel geschaltet ist, wenn der Wellenwiderstand der Halterung kleiner als der der Leitung ist. Denn es läßt sich dann wegen der vernachlässigbaren Verluste in der Trolitulscheibe immer eine verlustlose Kapazität angeben, die die Wellenverteilung in gleicher Weise verschiebt, wie es die Halterung mit ihrer zweifachen Reflexion am

Anfang und am Ende bewirkt. Über die Abhängigkeit dieser Kapazität vom Abschlußwiderstand wird an anderer Stelle[1] berichtet. Wie dort angegeben, kann der Wellenwiderstand der Halterung aus der Verschiebung errechnet werden, die die Spannungsverteilung erfährt, wenn das zunächst unbelastete Leitungsende kurzgeschlossen wird. Wie durch mehrfache Versuche festgestellt wurde, ist diese Verschiebungsgröße bei der oben beschriebenen Anordnung um etwa 3 mm kleiner als $\lambda/4$. Aus den am Schlusse des Abschnittes 2 gebrachten Erörterungen war aber gefolgt, daß allein das am Ende der Leitung befindliche Streufeld eine Verschiebung von 3 mm im Leerlauf bedingt. Da dieses Streufeld bei Kurzschluß der Leitung nicht wirksam ist, erklärt es allein die experimentell bestimmte 3 mm-Verschiebungsgröße. Hieraus folgt, daß die Halterung selbst einwandfrei abgeglichen ist, d. h. daß ihr Wellenwiderstand gleich dem der Leitung ist und somit die Halterung keine Störung der Wellenverteilung längs der Leitung hervorruft. Eine solche wird lediglich durch das am Ende der Leitung befindliche Streufeld verursacht.

Das Streufeld wird hervorgerufen durch eine von dem die Leitung abschließenden Widerstand unabhängige Kapazität. Ihre Wirkung ist daher identisch mit der einer „ideal kapazitiven" Halterung und wurde in der vorerwähnten Arbeit über den Einfluß von Halterungen diskutiert. Wir übernehmen aus dieser Arbeit die folgenden Ergebnisse:

1. Der Fehler, der bei der Bestimmung der Wirkkomponente des komplexen Abschlußleitwertes ohne Berücksichtigung der Streukapazität begangen wird, ist in relativem Maße gleich

$$\frac{\Delta G}{G} = T_0 \frac{T_0 (W^2 + T_l^2) - 2\, T_l (1 - W^2)}{1 + W^2\, T_l^2},$$

wobei $T_0 = \operatorname{tg} 2\pi\, l_0/\lambda$, $T_l = \operatorname{tg} 2\pi\, l/\lambda$ und $W = i\,(\min) / i\,(\max)$ gilt. Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Beziehung ist, daß die Größe l_0, die die Kurzschluß-Leerlaufverschiebung zu $\lambda/4$ ergänzt, kleiner als 1,6 $\lambda/100$ ist. Da sie in unserem Falle 3 mm groß ist und $\lambda \geqslant 40$ cm gilt, ist diese Forderung im vorliegenden Fall erfüllt. Der maximal mögliche Relativfehler ist gleich 2 T_l T_0. Für die Wellenlänge 40 cm bedingt dies den Wert 0,1 T_l. Solange $l \leqslant \lambda/8$ erfüllt ist, kann der Fehler also nicht größer als 10 % sein.

2. Der Relativfehler der Blindkomponente ist für kleines W, d. h. für geringe Wirkleitfähigkeit praktisch gleich $T_l\, T_0$, d. h. kleiner als 5 %, solange $l \leqslant \lambda/8$ gilt. Für größere W-Werte sinkt er zunächst ab und steigt dann schnell wieder an.

3. Will man die Komponenten eines beliebig komplexen Abschlußwiderstandes auf jeden Fall richtig bestimmen, so hat man die Verschiebung l, die die Spannungsverteilung längs der Leitung erfährt, wenn die zuvor freie Leitung mit dem zu bestimmenden Abschluß belastet wird, um $l_0 = 3$ mm zu vergrößern und von dem sich dann ergebenden Z-fachen Wert der Blindkomponente den kleinen Wert $\operatorname{tg} 2\pi\, l_0/\lambda = 1{,}9/\lambda$ abzuziehen.

Aus den vorstehenden Erörterungen folgt, daß der Einfluß des Streufeldes am Ende der Leitung in den meisten Fällen vernachlässigbar gering ist.

6. Abhängigkeit der meßbaren Größen vom Abschlußwiderstand.

Wir haben bereits im vorangegangenen Abschnitt erkannt, daß im Interesse eines geringen Einflusses der Halterung eine geringe Verschiebung der Spannungsverteilung l durch Anlegen der Probe wünschenswert ist. Da sich in vielen Fällen die Größe des die Leitung abschließenden komplexen Widerstandes verändern läßt (dies ist z. B. bei Proben, deren Materialkonstanten bestimmt werden sollen, der Fall),

[1] Siehe Kapitel IV dieser Arbeit.

erhebt sich ganz allgemein die Frage nach der zweckmäßigsten Dimensionierung des Abschlußwiderstandes. Die Beantwortung dieser Frage wurde für reine Blindwiderstände bereits durch Drude[1] gegeben. Und zwar ergibt sich, daß die Bestimmung des Blindwiderstandes am genauesten erfolgt, wenn dieser eine Verschiebung von $\lambda/8$ hervorruft. Ist der Abschlußwiderstand nicht rein imaginär, so liegen kompliziertere Verhältnisse vor. Im folgenden soll die Abhängigkeit der meßtechnisch wahrnehmbaren Größen von den Komponenten des Abschlusses diskutiert werden, um einen qualitativen Überblick über die zu erwartenden Wirkungen zwecks Vermeidung meßtechnisch ungeeigneter Dimensionen zu vermitteln.

Ist $\mathfrak{G}$ der im allgemeinsten Fall beliebig komplexe Leitwert am Ende der Leitung und sind a und b die Komponenten seines Z-fachen Wertes gemäß

$$Z\,\mathfrak{G} = a + jb \tag{6a}$$

(Z Wellenwiderstand der Meßleitung), so besteht mit der durch $\mathfrak{G}$ bedingten Verschiebung der Spannungsverteilung l und dem Betrag des Reflexionskoeffizienten nach Drude der folgende Zusammenhang:

$$\operatorname{tg} 4\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{2b}{1 - a^2 - b^2} \tag{6b}$$

$$\rho^2 = \frac{a^2 + b^2 + 1 - 2a}{a^2 + b^2 + 1 + 2a} \tag{6c}$$

Die Abhängigkeit der Größen l/λ und ρ^2 von a ist in den beiden folgenden Abbildungen 10 und 11 dargestellt, wobei b als Parameter der Kurvenscharen gewählt ist.

Betrachten wir zunächst die Abhängigkeit der Größe l/λ von a. Aus der Abb. 10 erkennt man, daß l/λ mit a monoton ansteigt, d. h. je größer die Wirkkomponente G der Leitfähigkeit $\mathfrak{G}$ ist, umso größer ist auch l. Der Wert $\lambda/4$ kann nie überschritten werden. Er liegt bei Kurzschluß ($a = \infty$!) vor. Vor allem in der Nähe des Wertes $a = 1$ ($Z = G$!) ist der Anstieg von l mit a beträchtlich und dies wiederum umso mehr, je kleiner $b = ZC$ ist, d. h. je reiner der Abschlußleitwert ein rein ohmscher ist. Andererseits zeigt Abb. 11, daß gerade für kleine b die Größe ρ^2 in Abhängigkeit von a ein Minimum erreicht, das nur wenig von 0 abweicht. Dies bedeutet, daß das Wellenverhältnis $W = 1 - \rho \,/\, 1 + \rho$ nahe bei 1 liegt und infolgedessen die Lage der Spannungsverteilung nicht sehr genau feststellbar ist. Für $a < 1$ ist l, wie man ebenfalls Abb. 10 entnimmt, auch monoton von b abhängig. Ist dagegen $a > 1$, so gilt dies nicht mehr unbedingt: Hier kann l mit a sowohl zu- als auch abnehmen. Offenbar erreicht l als Funktion von b ein Minimum, das größer als $\lambda/8$ sein muß. Wie man durch Differentiation von (6b) nach b erkennt, liegt das Minimum vor, wenn

$$a^2 - b^2 = 1, \tag{6d}$$

und hat den Wert

$$\operatorname{tg} 4\pi \frac{l}{\lambda} = -\frac{1}{b}. \tag{6e}$$

Ist b kleiner als Gleichung (6d) entspricht, so nimmt l mit b zu, im Gegenfalle sinkt l bei b-Anwachs, wie man ebenfalls aus Abb. 10 ersieht. Infolge der erörterten Gegebenheiten ist für $a > 1$ eine eindeutige Zuordnung von b und l nicht mehr gegeben. Es lassen sich hier zu gegebenem a stets zwei b-Werte finden, die die gleiche Verschiebung l bedingen.

Die Abhängigkeit der Größe ρ^2 von a und b ist dagegen, wie man aus Abb. 11 erkennt, immer eindeutig. In Abhängigkeit von a beginnt ρ^2 vom Wert 1 abzusinken, um ein Minimum zu erreichen und dann wieder den Wert 1 bei $a = \infty$ zu erreichen.

[1] Siehe die Arbeit über Drudes 2. Methode in Wiedemanns Annalen **61**, S. 466, [1897].

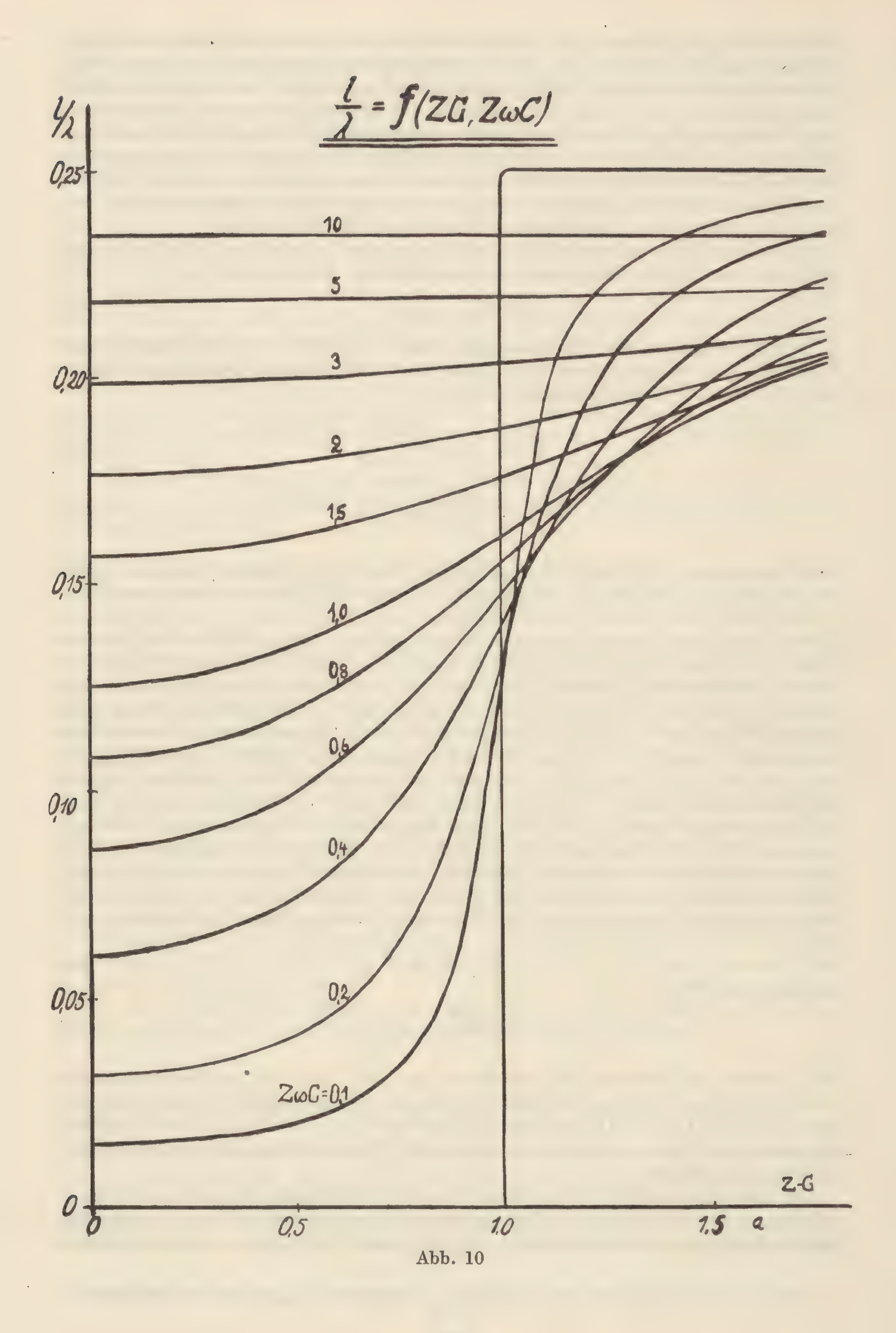

l/λ = f(ZG, ZωC)
l/λ
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0
10
5
3
2
1,5
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
ZωC=0,1
Z·G
0
0,5
1,0
1,5
a

Abb. 10

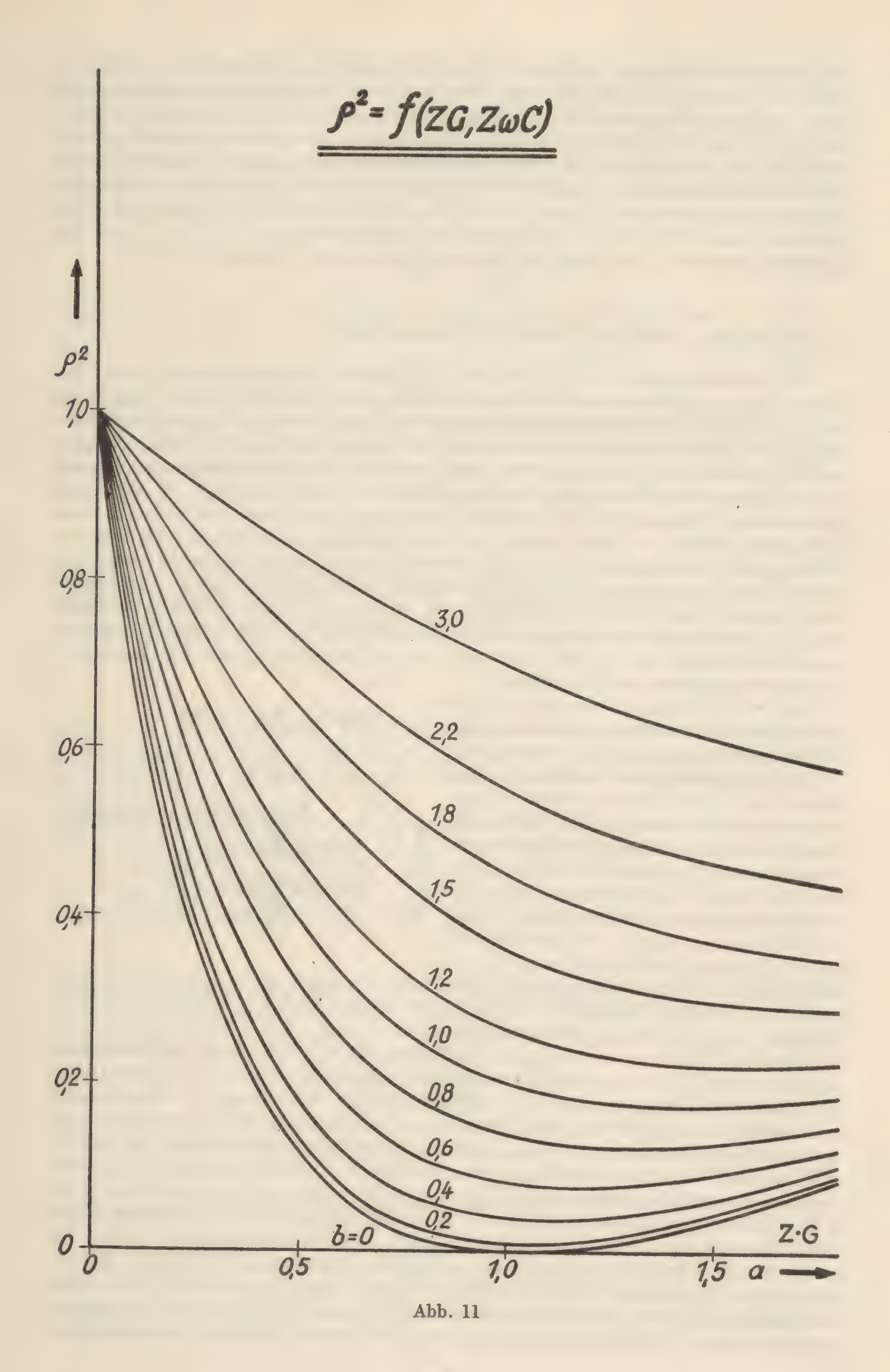

$\rho^2 = f(ZG, Z\omega C)$
ρ^2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
3,0
2,2
1,8
1,5
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
b=0
Z·G
0
0,5
1,0
1,5
a

Abb. 11

Die Minimumbedingung ergibt sich durch Differentiation des Ausdruckes (6c) zu $a^2 = b^2 + 1$, was mit Gleichung (6d) übereinstimmt. Dies bedeutet, daß die weiter oben qualitativ ausgedrückte Behauptung exakt gilt: l und ρ^2 erreichen in Abhängigkeit von a gleichzeitig ihr Minimum. Diese Minima können nur für $a > 1$ vorliegen, da die Gleichung (6d) a-Werte kleiner als 1 nicht zuläßt. Der Minimalwert bei Gültigkeit von (6d) folgt aus Gleichung (6c) mit $\rho^2 = a - 1 / a + 1$. In Abhängigkeit von b nimmt ρ^2 monoton zu bis zum Grenzwert $\rho^2 = 1$, der für $b = \infty$ erreicht wird. Für b gleich Null hat ρ den Minimalwert $a - 1 / a + 1$, also den gleichen Wert wie ρ^2 bei Erreichen seines Minimums in Abhängigkeit von a.

7. Messungen nach der Substitutionsmethode.

Bei der Bestimmung von Stoffkonstanten führen Substitutionsmethoden, bei denen die zu untersuchende Substanz mit Normalen bekannter Daten verglichen wird, oft leichter zum Ziel als Absolutmethoden. Dies gilt vor allem bei der Bestimmung der Dielektrizitätskonstante gering leitfähiger Proben. Will man dagegen beliebig leitfähige Dielektrika untersuchen, so sind Vergleichsverfahren ungeeignet, da bei diesen zwei Konstanten einzuregulieren sind, was bei deren oft gegebener gegenseitiger Abhängigkeit Schwierigkeiten bereitet. Der Vorteil der Substitutionsverfahren besteht vor allem darin, daß alle Rechnungen fortfallen und daß alle Fehlerquellen der Anordnung eliminiert werden. Sie sind daher bei wenig leitfähigen Dielektrika von so großem Wert, daß ihre Anwendung unbedingt geraten erscheint. Aus diesem Grunde sollen im folgenden die von uns in dieser Richtung durchgeführten Versuche und die Gesichtspunkte, die hierbei als wesentlich erkannt wurden, ausgeführt werden. Es handelt sich dabei um die Bestimmung der *DK* gering leitender Flüssigkeiten und Festkörper.

Die Proben werden in den in Abb. 12 skizzierten Kondensator eingebracht. Derselbe besteht aus einem von oben zugänglichen Hartgummigefäß, in das ein freier Raum von $3 \times 20 \times 20$ mm zwecks Probenaufnahme eingelassen ist. Die Elektroden bestehen aus zwei Messingscheibchen von 5 mm Radius, die plan mit den Seitenwänden des Gefäßes abschließen und deren eine etwas in Richtung auf die andere verstellbar ist, um so auf jeden Fall ein einwandfreies Anliegen der Elektroden an die zu untersuchende Probe ermöglichen zu können. Die Größe der Elektroden wurde so gewählt, daß die Füllung mit einem Material der *DK* 5 bei $\lambda = 1$ m etwa eine Verschiebung von $\lambda/8$ bedingt. Die Elektroden enden in zwei 1 mm starken Messingzäpfchen, die es gestatten, das ganze Gefäß am Ende der Leitung zwischen zwei dort befindliche Vertiefungen in den Leitern einzuklemmen. Die Eichung des Kondensators wurde von uns in der Weise vorgenommen, daß derselbe mit einer Reihe von Flüssigkeiten bekannter *DK* gefüllt und die dann bei seiner Anbringung verursachten Verschiebungen der Spannungsverteilung ermittelt wurden. Auf diese Weise ergab sich ein Zusammenhang zwischen Verschiebungsgröße und *DK*, der graphisch dargestellt in einfachster Weise *DK*-Bestimmungen anderer Substanzen erlaubt. Als Eichflüssigkeiten haben wir nichtleitende Substanzen gewählt, die in dem interessierenden Wellenlängengebiet noch keine Dispersion aufweisen und deren *DK* bei Niederfrequenz mit Hilfe eines Kapazitätsmeßgerätes und eines zu diesem Zweck hergestellten Spezialkondensators gemessen wurde. Der Spezialkondensator war so konstruiert, daß sein Streufeld gering

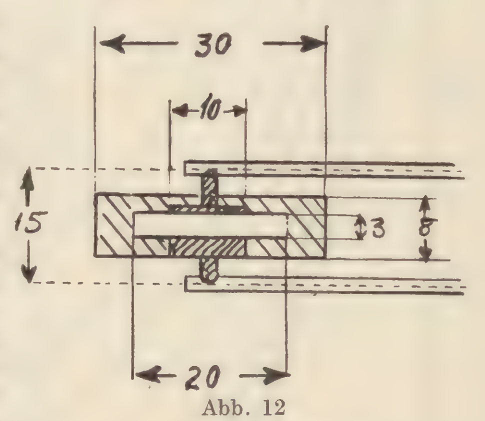


Abb. 12

war und er von der Eichflüssigkeit ganz umspült wird. Dies ist erforderlich, da ein nicht ganz in der Eichflüssigkeit verlaufendes Streufeld den Zusammenhang von Flüssigkeits-*DK* und Kondensatorkapazität unübersichtlich gestaltet.

Wie groß ist nun der Fehler der *DK* einer schwach leitenden Substanz, wenn die oben geschilderte Methode zur *DK*-Bestimmung verwandt wird? Der mit der zu untersuchenden leitenden Substanz gefüllte Kondensator verursacht eine Verschiebung, für die Gleichung (6b) gilt:

$$T = \operatorname{tg} 4\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{2b}{1 - a^2 - b^2}, \tag{7a}$$

worin $b = Z\omega C$ und $a = ZG$ ist. Die Auflösung dieser Gleichung nach b ergibt

$$b = -\frac{1}{T} \pm \frac{1}{T}\sqrt{1 + T^2(1 - a^2)}. \tag{7b}$$

Da b eine positive Größe ist und für $a < 1$ der Wurzelradikant größer als 1 ist, kommt für den hier interessierenden Fall geringer Leitfähigkeit ($1/G > Z$!) nur das positive Vorzeichen der Wurzel in Betracht:

$$b = -\frac{1}{T}\left[1 - \sqrt{1 + T^2(1 - a^2)}\right]. \tag{7c}$$

Der gleichen Verschiebung l entspricht ein anderer b-Wert $b_0 = Z\omega C_0$, wenn die Eichflüssigkeit mit $a = 0$ als Ursache der Verschiebung gedacht wird. b_0 erhält man, indem man $a = 0$ in Gleichung (7c) einführt:

$$b_0 = -\frac{1}{T}\left[1 - \sqrt{1 + T^2}\right]. \tag{7d}$$

Nach dem oben geschilderten Substitutionsverfahren gewinnen wir an Stelle der uns interessierenden Größe b die Größe b_0 bzw. den dazu proportionalen C-Wert. Den Relativfehler, den wir so begehen, werden wir daher zweckmäßig auf b_0 beziehen und erhalten so

$$\frac{b_0 - b}{b_0} = \frac{C_0 - C}{C_0} = \frac{1 - \sqrt{1 + T^2} - \left[1 - \sqrt{1 + T^2(1 - a^2)}\right]}{1 - \sqrt{1 + T^2}}$$

$$\frac{C_0 - C}{C_0} = \frac{\sqrt{1 + T^2} - \sqrt{1 + T^2(1 - a^2)}}{\sqrt{1 + T^2} - 1}. \tag{7e}$$

Wird vorausgesetzt, daß T kleiner als 1 ist, d. h. daß $l < \lambda/8$ gilt, so ist es auch $T^2(1 - a^2)$ für $a < 1$ und es lassen sich die Wurzelausdrücke in guter Näherung durch ihre nach dem dritten Glied abgebrochenen Potenzreihen

$$\sqrt{1 + T^2} = 1 + \frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{8}T^4$$

$$\sqrt{1 + T^2(1 - a^2)} = 1 + \frac{1}{2}T^2(1 - a^2) - \frac{1}{8}T^4(1 - a^2)^2$$

ersetzen. Es folgt dann aus Gleichung (7e) nach kurzer Zwischenrechnung

$$\frac{C_0 - C}{C_0} = a^2 \frac{1 - \frac{1}{4}T^2(2 - a^2)}{1 - \frac{1}{4}T^2} \approx a^2\left[1 - \frac{1}{4}T^2(1 - a^2)\right]. \tag{7f}$$

Ist T wesentlich kleiner als 1, so wird

$$\frac{C_0 - C}{C_0} = a^2. \tag{7g}$$

Für $T = 0{,}5$ ist der Fehler der Gleichung (7g) z. B. kleiner als 6 %. Auf jeden Fall liefert Gleichung (7g) einen zu großen Wert für $a < 1$. Da $a = Z \cdot G = Z/R$ ist, folgt: Der bei Anwendung der beschriebenen Substitutionsmethode begangene Kapazitätsfehler ist kleiner als 11 %, wenn der ohmsche Teil des Abschlußwiderstandes mindestens gleich dem dreifachen Wellenwiderstand und kleiner als 4 %, wenn er größer als der fünffache Wellenwiderstand ist. Für unsere Leitung mit einem $Z = 330\,\Omega$ bedeutet dies, daß Kapazitäten, deren Widerstand 1000 Ω übersteigt, nach dem Substitutionsverfahren meßbar sind.

Die Abschätzung des Fehlers nach den gebrachten Beziehungen setzt die Kenntnis von G voraus. Meist ist diese ebensowenig wie die von C gegeben. Es soll daher nunmehr eine Beziehung abgeleitet werden, die den Fehler als Funktion der meßbaren Größen liefert. Gemessen werden die Resonanzbreite und damit das Wellenverhältnis W[1] und die Verschiebungsgröße l. Zwischen W und dem Betrag des Reflexionskoeffizienten vom Abschlußwiderstand ρ besteht bekanntlich der einfache Zusammenhang

$$W = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}, \tag{7h}$$

so daß wir uns die Aufgabe stellen, $(C_0 - C) / C_0$ als Funktion von ρ und l auszudrücken. Bekanntlich gilt ferner[2]

$$\mathfrak{G} Z = a + jb = \frac{1 - p}{1 + p},$$

wobei $p = \rho e^{-j 4 \pi l/\lambda}$ der komplexe Reflexionskoeffizient des Leitungsabschlusses ist. Trennt man diese Beziehung in ihre Komponenten, so folgt nach kurzer Rechnung

$$a = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 + 2\rho \cos 4\pi\, l/\lambda} \tag{7i}$$

$$b = \frac{2\rho \sin 4\pi\, l/\lambda}{1 + \rho^2 + 2\rho \cos 4\pi\, l/\lambda}. \tag{7k}$$

Bei vernachlässigbarer Leitfähigkeit des Abschlusses ist die Reflexion vollständig d. h. es gilt $\rho = 1$ und somit

$$b_0 = \frac{\sin 4\pi\, l/\lambda}{1 + \cos 4\pi\, l/\lambda} = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}. \tag{7l}$$

Bildet man nunmehr wieder den Quotienten $(b_0 - b) / b_0$ mit Hilfe der Gleichungen (7k) und (7l), so folgt

$$\frac{b_0 - b}{b_0} = 1 - \frac{2\rho\left(1 + \cos 4\pi \frac{l}{\lambda}\right)}{1 + \rho^2 + 2\rho \cos 4\pi \frac{l}{\lambda}}$$

[1] Siehe hierzu die Ausführungen in Kapitel II.
[2] Sie z. B. bei F. Vilbig, Lehrbuch der Hochfrequenz-Technik, Leipzig [1939].

$$\frac{C_0 - C}{C_0} = \frac{(1-\rho)^2}{1+\rho^2+2\rho\cos 4\pi\frac{l}{\lambda}}. \tag{7m}$$

Wird hierin W mit Hilfe von Gleichung (7h) eingeführt, so erhält man

$$\frac{C_0 - C}{C_0} = \frac{2W^2}{1+W^2+(1-W^2)\cos 4\pi\frac{l}{\lambda}} \tag{7n}$$

und damit die gesuchte Möglichkeit, $(C_0 - C)/C_0$ aus l und W zu bestimmen. Da $\cos 4\pi l/\lambda$ kleiner als 1 ist, muß der Nenner von Gleichung (7n) kleiner als 2 und $(C_0 - C) / C_0$ somit größer als W^2 sein. Da $(C_0 - C) / C_0$ andererseits kleiner als a^2 ist, liegt sein wahrer Wert zwischen W^2 und a^2. Einen besonders einfachen Ausdruck, der dies gut erkennen läßt, erhält man, wenn in Gleichung (7m) der Ausdruck (7i) eingeführt wird. So folgt

$$\frac{C_0 - C}{C_0} = \frac{(1-\rho)^2}{1-\rho^2}a = \frac{1-\rho}{1+\rho}a = W \cdot a. \tag{7o}$$

Da Gleichung (7i) sich in die Form

$$a = \frac{1-\rho}{1+\rho}\,\frac{1}{1-\frac{2\rho}{(1+\rho)^2}\left(1-\cos 4\pi\frac{l}{\lambda}\right)}$$

bringen läßt, ist (7o) identisch mit

$$\frac{C_0 - C}{C_0} = a^2\left[1-\frac{2\rho}{(1+\rho)^2}\left(1-\cos 4\pi\frac{l}{\lambda}\right)\right]. \tag{7p}$$

Wegen $|\cos 4\pi l/\lambda| < 1$ und $\rho < 1$ bezw. $2\rho/(1+\rho)^2 < 0{,}5$ folgt aus Gleichung (7p) somit die wichtige Abschätzung

$$\frac{a^2}{2} < \frac{C_0 - C}{C_0} < a^2. \tag{7q}$$

Da weiterhin den Gleichungen (7i) und (7k) zu entnehmen ist, daß

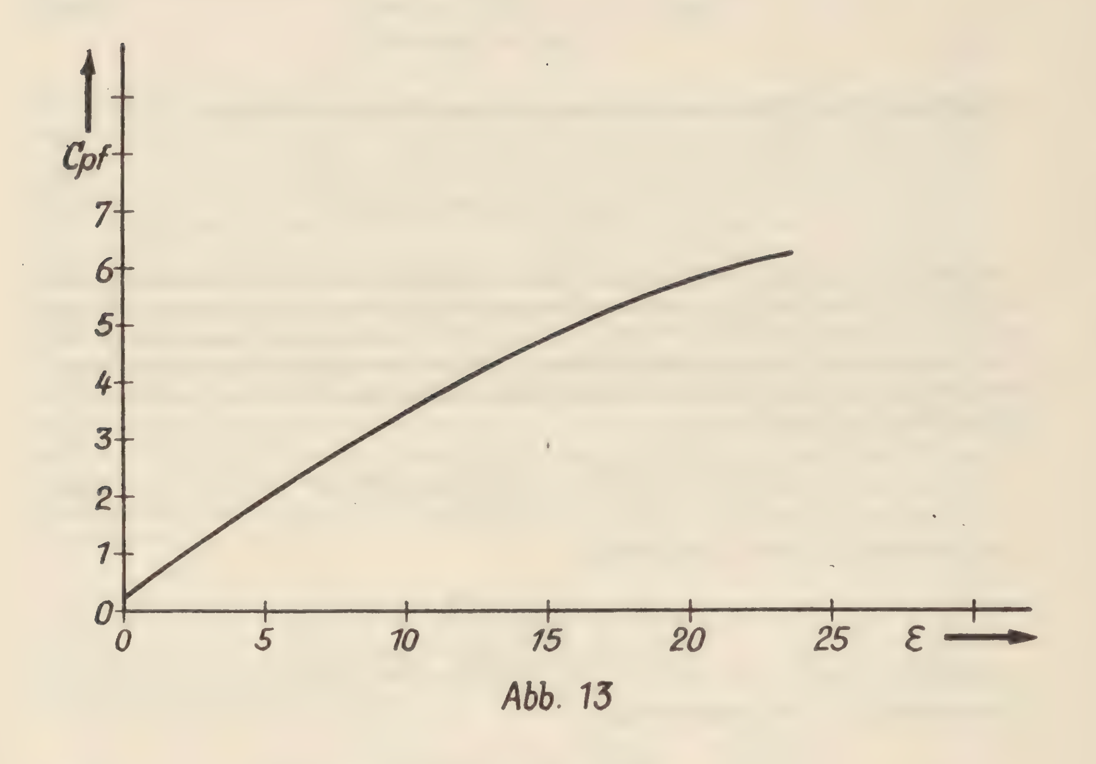
$$\frac{1}{a} + \frac{b}{a}\,\frac{1-\cos 4\pi\frac{l}{\lambda}}{\sin 4\pi\frac{l}{\lambda}} = \frac{1+\rho}{1-\rho}$$

$$\frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{a}{1+b\,\operatorname{tg} 2\pi\frac{l}{\lambda}}$$

gilt, ist die Gleichung (7o) identisch mit

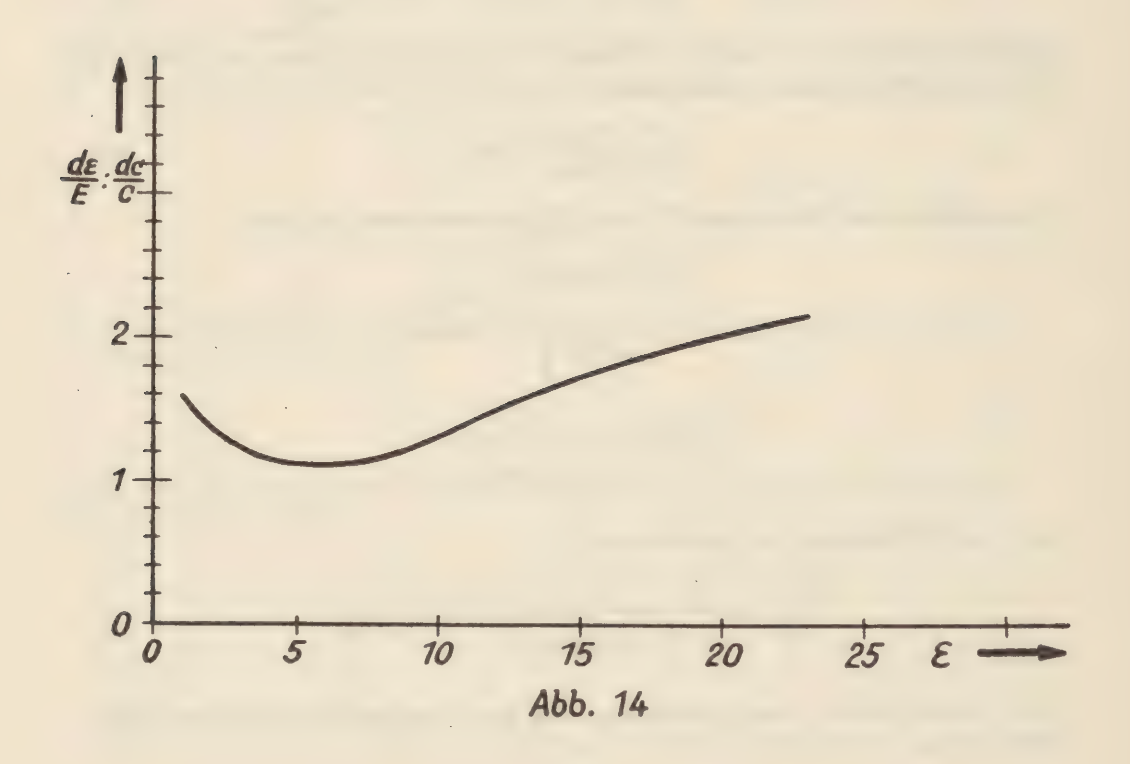
$$\frac{C_0 - C}{C_0} = a^2\frac{1}{1+b\,\operatorname{tg} 2\pi\frac{l}{\lambda}} = a^2\frac{1}{1+b\cdot b_0}. \tag{7r}$$

Der Relativfehler von Gleichung (7g) ist hiernach gleich dem Produkt $b \cdot b_0$.



Cpf
7
6
5
4
3
2
1
0
0
5
10
15
20
25
ε

Abb. 13



$\frac{d\varepsilon}{E} : \frac{dc}{c}$
2
1
0
0
5
10
15
20
25
ε

Abb. 14

Wir haben uns nun noch mit der Frage zu beschäftigen, wie sich der durch die Wirkkomponente des Abschlusses bedingte C-Fehler auf die DK auswirkt. Wäre ε proportional zu C, so wäre der DK-Fehler mit dem C-Fehler identisch. Da aber ein nicht vernachlässigbarer Teil der elektrischen Kraftlinien bei dem in Abb. 12 dargestellten Kondensator das zu untersuchende Dielektrikum nicht durchsetzt, ist dies nicht der Fall. Es ist noch nicht einmal von Nutzen, C in einen ε proportionalen Teil und einen davon unabhängigen Teil gemäß dem Ansatz $C = \varepsilon C_1 + C_2$ aufzuteilen, da der Anteil des im Dielektrikum verlaufenden Feldes von der DK abhängt und somit C_1 und C_2 selbst Funktionen von ε sind. Man wird sich hier zweckmäßig so helfen, daß man durch Füllen des Kondensators mit verschiedenen nichtleitenden Flüssigkeiten bekannter DK verschiedene Kapazitäten herstellt, diese nach der Formel $Z\omega C = \operatorname{tg} 2\pi\, l/\lambda$ experimentell bestimmt und in Abhängigkeit von ε darstellt. Für den in Abb. 12 dargestellten Kondensator ergibt sich so die in Abb. 13 gebrachte Kurve. Wir wollen nun wissen, um welchen Faktor der ε-Fehler größer als der C-Fehler ist, d. h. wir interessieren uns für den Quotienten

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} : \frac{dC}{C} = \frac{d\,\varepsilon}{dC} : \frac{\varepsilon}{C},$$

wobei $d\varepsilon$ die infinitesimale ε-Änderung ist, die einer kleinen C-Änderung $d\,C$ zugeordnet ist. Die durch graphisches Differenzieren aus Abb. 13 gewonnene Abhängigkeit von $\frac{d\varepsilon}{dC} : \frac{\varepsilon}{C}$ ist in Abb. 14 dargestellt. Man erkennt, daß der Faktor, um den der DK-Fehler größer als der C-Fehler ist, nicht konstant ist. Sein Wert schwankt zwischen 1,6 und 2,1 wenn ε maximal gleich 21 ist. Er erreicht das Minimum 1,1 bei $\varepsilon = 5$. Dies bedeutet, daß DK-Werte in der Nähe von 5 besonders unabhängig vom Leitfähigkeitseinfluß sind.

Zum Abschluß unserer Betrachtungen zur Substitutionsmethode wollen wir die Frage erörtern, welche Fehler durch unvollkommenen Kontakt zwischen Elektrode und Probe entstehen können. Diese Fehler kommen in Betracht bei festen Proben, die um das Stück $\Delta\, d$ dünner als d sind. Unter Außerachtlassung des Streufeldes erhält man wie folgt einen Überblick über den zu erwartenden Effekt: Ist F die Fläche der Elektroden, so beträgt die Probenkapazität unter Vernachlässigung des Streufeldes

$$C_p = \frac{F}{4\,\pi\,(d - \Delta\, d)}.$$

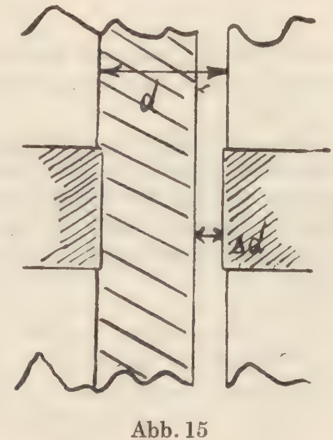


Abb. 15

Mit dieser in Reihe liegt die Luftkapazität

$$C_L = \frac{F}{4\,\pi\,\Delta\, d}.$$

Infolge der Eichung messen wir die auf den Abstand d bezogene scheinbare DK ε', für welche

$$C' = \frac{\varepsilon' F}{4\,\pi\, d}$$

gilt. Dabei ist $1/C' = 1/C_L + 1/C_p$. Hieraus folgt nach kurzer Rechnung

$$\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\Delta d}{d}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{7s}$$

Der auf den ermittelten Wert ε' bezogene Relativfehler hat somit den Wert

$$\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\Delta\,d}{d}\,(\varepsilon - 1). \tag{7t}$$

Da bei dem von uns verwandten Kondensator $d = 3$ mm ist, ergibt sich für ein $d = 0{,}1$ mm die nebenstehende Tabelle. Sie zeigt, daß vor allem bei Proben mit großer *DK* die Probendicke außerordentlich genau mit dem Elektrodenabstand übereinstimmen muß, wenn Fehlbestimmungen vermieden werden sollen.

ε	$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon'}$ in %
1	0
2	3,3
3	6,6
5	13,2
10	30
20	60

Zwecks Vermeidung dieser Fehlerquelle haben wir, wie schon oben erwähnt, die eine Elektrode mit einem Gewinde versehen. Hierdurch ist die Möglichkeit gegeben, bei zu dünner Probe durch Nachstellen der Elektrode den Luftzwischenraum zu beseitigen. Der bei diesem Verfahren entstehende Fehler ergibt sich wie folgt: Die Verringerung des Elektrodenabstandes um $\Delta\,d$ bedingt

$$C' = \frac{\varepsilon F}{4\pi\,(d - \Delta\,d)}\,.$$

Dem entspricht ein ε'-Wert für den Eichabstand d gemäß

$$\varepsilon' \frac{F}{4\pi d} = \varepsilon \frac{F}{4\pi\,(d - \Delta\,d)}\,,$$

woraus

$$\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\Delta\,d}{d} \tag{7u}$$

folgt. Der bei unserer Methode begangene Fehler ist also um den Faktor $\varepsilon - 1$ kleiner als im oben behandelten Fall. Er beträgt für $d = 3$ mm und $\Delta\,d = 0{,}1$ mm nur 3,3 %.

Bei der Ableitung der Formel (7u) haben wir ebenso wie bei der von (7t) vom Streufeld abgesehen. Bei unserem Kondensator verringert sich die Zusatzstreukapazität infolge des Auftretens von Luftvolumina im Probenraum bei zu dünner Probe. Dadurch wird die durch das Verringern von d bedingte Erhöhung von C zum Teil kompensiert. Die in der folgenden Tabelle niedergelegten Zahlen bestätigen dies.

$\Delta\,d$ (mm)	ε'	$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon'}$ in %	$100\,\frac{\Delta\,d}{d}$	$\frac{\Delta\,d}{d} : \frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon'}$
0	3,73	0	0	
0,1	3,84	2,9	3,3	1,1
0,2	3,92	5,1	6,7	1,3
0,25	3,95	5,9	8,3	1,4
0,45	4,1	9,9	15	1,5

Sie wurden gewonnen, indem die Dicke einer zunächst gut passenden Probe fortlaufend verdünnt und ε' gemessen wurde. Der Quotient aus theoretischem und experimentell gewonnenem Fehler $\Delta\,d/d : \Delta\,\varepsilon/\varepsilon'$ wächst infolge des wachsenden Einflusses der Lufträume bei zunehmendem ε an. Dies bedeutet, daß vor allem bei größeren $\Delta\,d$-Werten der Fehler beträchtlich kleiner wird als ihn die Gleichung (7u) angibt. Zusammenfassend läßt sich sagen: D e r F e h l e r , d e r d u r c h s c h l e c h t e P r o b e n h e r s t e l l u n g b e d i n g t w i r d , i s t k l e i n e r a l s 3 %, w e n n Δd k l e i n e r a l s 0,1 m m i s t u n d k l e i n e r a l s 6 %, w e n n Δd u n t e r $\frac{1}{4}$ m m b e t r ä g t.

8. Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Lecherleitung in offener Ausführungsform beschrieben, mit der in einfacher Weise die Bestimmung komplexer Widerstände möglich ist. Die Anordnung arbeitet nach einem Resonanzverfahren im Wellenlängenbereich von 40 bis 300 cm und hat den Vorteil großer Einfachheit. Die Verluste durch Abstrahlung und die ohmschen Leitungsverluste sind von gleicher Größenordnung wie die in der Halterung der Leiter, also gering. Der Leiterabstand ist mit 15 mm so klein, daß bei der verwandten Methodik keine störende Beeinflussung von außen vorliegt und die Erregung von Gleichtaktwellen unmöglich ist. Ein ausführlicher Vergleich mit den im gleichen Wellenlängengebiet arbeitenden Leitungen, die geschlossen sind und keine Resonanzabstimmung verwenden, beweist die Überlegenheit des beschriebenen Verfahrens. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden neben Fragen der Leiterhalterung und Fragen der Abhängigkeit der meßbaren Größen vom Abschlußwiderstand die folgenden Punkte erörtert:

1. Wie genau sind bei Materialkonstantenbestimmungen die Proben bezüglich ihres Sitzes auf den Leitern anzufertigen? Die Behandlung dieser Frage zeigt, daß ein Luftpolster zwischen Leiter und Probe etwa doppelt so stark stört, wie bei konzentrischen Anordnungen mit dem üblichen Durchmesserverhältnis von etwa 3. Diese Störung läßt sich um den Faktor $\varepsilon - 1$ verringern, wenn die Leiterenden gespreizt sind und federnd an die Probe anliegen. Der Außendurchmesser der Proben braucht 6 cm nicht zu übersteigen.

2. Eingehende Ausführungen über das Substitutionsverfahren zur Ermittlung der *DK* schlecht leitender Proben mit Hilfe nichtleitender Substitutionssubstanzen zeigen, daß dies Verfahren einen Relativfehler von ($a = Z/R$!)

$$\frac{\triangle C}{C} = \frac{2\,W^2}{1 + W^2 + (1 - W^2)\cos 4\pi \frac{l}{\lambda}} = Wa = a^2 \frac{1}{1 + b\,b_0}$$

$$\approx a^2 \left[1\;(1 - a^2)\;\mathrm{tg}^2\, 4\pi \frac{l}{\lambda}\right]$$

bedingt. Dieser Fehler liegt zwischen den Schranken $a^2/2$ und a^2 und ist bei der beschriebenen Anordnung kleiner als 4%, wenn der ohmsche Teil R des Abschlußwiderstandes größer als 1,6 $k\Omega$ ist. In weiteren Untersuchungen wird bestimmt, um welchen Faktor der *DK*-Fehler größer als der Kapazitätsfehler ist und dieser in Abhängigkeit von ε dargestellt. Dieser Faktor schwankt bei dem von uns verwandten Kondensator zwischen 1,1 und 2. In die Arbeit abschließenden Betrachtungen wird gezeigt, daß der durch zu dünne Proben bedingte Fehler um mehr als das $(\varepsilon - 1)$-fache verringert werden kann, wenn die Elektroden bis zur Probenberührung nachgestellt werden. Er ist dann kleiner als 100 $\Delta\, d/d$%, wenn d der normale Elektrodenabstand und $\Delta\, d$ der Mangel der Probendicke an d ist.

DER EINFLUSS VON HALTERUNGEN AM ENDE VON LECHERLEITUNGEN.

1. Einleitung.

Meßleitungen, mit deren Hilfe komplexe Widerstände bei Dezimeterwellen bestimmt werden können, werden meist konzentrisch ausgeführt und arbeiten nach dem Abtastverfahren. Bei diesem wird mit einer längs der Leitung gleitenden Sonde die Spannungsverteilung aufgenommen[1]. Es ist hierbei besonders wichtig, daß der Abstand der auf dem Außenleiter beweglichen Sonde vom Innenleiter bei der Führung der Sonde exakt eingehalten wird, d. h. daß die Lage des Innenleiters an keiner Stelle auch nur geringfügig exzentrisch ist. Bei Leitungen mit einer Gesamtlänge von mehr als 1 m, wie sie für Messungen mit Wellenlängen über 50 cm erforderlich sind, kann dies nur mit Hilfe mehrerer Stützen erreicht werden. Die Bedeutung einer solchen Halterung für die Spannungsverteilung längs einer Leitung hängt nicht nur von ihren Dimensionen, sondern auch von ihrer Lage bezüglich der Spannungsverteilung ab. So gibt es „kapazitive" Halterungen, die vor allem in einem Spannungsbauch, und „induktive" Halterungen, die in einem Strombauch die Verteilung beeinflussen[2]. Da nun die Lage der Spannungs- und Stromverteilung eine Funktion des Abschlußwiderstandes ist, folgt eine Abhängigkeit der störenden Wirkung einer an beliebiger Stelle der Leitung angebrachten Halterung vom Abschlußwiderstand. Die Herleitung handlicher Formeln, die die Störung charakterisieren, ist nicht einfach. Bedarf die Leiteranordnung gar mehrererLeiterhalterungen, und dies ist wie gesagt bei den Leitungen für den angegebenen Wellenbereich der Fall, so wird die mathematische Berechnung des Einflusses aller dieser an den verschiedensten Stellen der Spannungsverteilung befindlichen Halterungen praktisch unmöglich.

Die Überwindung dieser Schwierigkeiten kann grundsätzlich auf zwei verschiedene Weisen erreicht werden. Die erste besteht darin, die Störung der einzelnen Halterungen zu beseitigen. Dies erfordert eine Angleichung des Wellenwiderstandes in der Halterung an den Wellenwiderstand der Leitung, da dann bekanntlich[3] keine Reflexion der auf die Halterung auftreffenden Wellen an dieser erfolgen kann und allein solche Reflexionen für die unerwünschten Störungen verantwortlich sind. Über die verschiedenen Möglichkeiten, den Wellenwiderstand der Halterung zu prüfen und über die Konstruktionen, die einen möglichst einwandfreien Wellenwiderstandsausgleich gewährleisten, liegen mehrere Arbeiten vor[4]. Die durch eine Halterung bedingte kapazitive Belastung der Leitung kann durch entsprechende Änderung der Leiterdurchmesser verringert werden. Diese wird zweckmäßig so erfolgen, daß die hierbei gleichzeitig hervorgerufene Induktivitätsänderung der Leiter so bemessen ist, daß der Quotient L/C, der den Wellenwiderstand allein bestimmt, sich nicht ändert. Die so gegebene Ausführung einer Halterung (siehe Abb. 2) läßt sich rechnerisch nur festlegen, wenn der Verlauf der elektrischen Kraftlinien überall rechtwinklig zu den Leitern erfolgt[5]. Leider ist aber an der Stelle der sprunghaften Änderung der Leiterdimensionen ein recht komplizierter Verlauf gegeben, der keine Voraussagen erlaubt. Der so bedingte Wellenwiderstand der Halterung kann nur experimentell ermittelt werden. Die Herstellung einer einwandfreien Hal-

[1] Siehe hierzu die eingehenderen Ausführungen in der Einleitung (Kapitel I).
[2] Siehe hierzu weiter unten die Ausführungen auf S. 85—88.
[3] Sie z. B. hierüber bei Vilbig, Lehrbuch der HF-Technik.
[4] Es sei hier vor allem auf die in der letzten Jahren in der Zeitschrift f. HF-Technik und Elektroakustik erschienenen Abhandlungen von Weissfloch und von Meinke hingewiesen.
[5] So wurde die in Kapitel III, S. 8 beschriebene Halterung berechnet.

terung kann somit nur dadurch erfolgen, daß die Halterung schrittweise verändert wird, bis die nach jeder Änderung durchgeführte experimentelle Prüfung Brauchbarkeit ergibt. Da die Anfertigung guter Halterungen also nicht einfach und vor allem ihr Abgleich umständlich ist, wird man versuchen, mit möglichst wenig Halterungen auszukommen. Damit kommen wir zu der zweiten Möglichkeit, den Halterungsschwierigkeiten zu begegnen. Diese besteht in der Verwendung einer einzigen Halterung an einer Stelle der Leitung, an der ihr Einfluß relativ leicht überblickt werden kann.

In Kapitel III hat der Verfasser gezeigt, daß es entgegen anderen Ansichten durchaus möglich ist, mit einer einzigen, am Ende der Leitung angebrachten Halterung auszukommen, wenn ein geeignetes Meßverfahren gewählt wird. In der folgenden Abhandlung wird nun der Einfluß einer solchen Halterung berechnet und angegeben, wie er erfaßt und bei der Bestimmung des Abschlußwiderstandes eliminiert werden kann. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Halterung aus einem einwandfreien Isolationsmaterial hergestellt und ihre Wirkung auf die Leitung infolgedessen durch einen Vierpol ohne ohmsche Glieder darstellbar ist.

An den Stellen des Ein- und Austrittes der längs der Leitung laufenden Wellenzüge in und aus der Halterung werden Teile dieser Wellenzüge reflektiert. Dieser Reflexionsvorgang kann in seiner Wirkung auf die Spannungsverteilung längs der Leitung auch durch die Existenz einer dem Abschlußwiderstand parallel geschalteten Kapazität oder eine mit dem Abschluß in Reihe geschaltete Selbstinduktion erklärt werden. Es läßt sich nämlich stets eine Kapazität bzw. Induktivität angeben, die eine Phasendrehung der am Ende reflektierten Welle bewirkt, so daß der reflektierte Wellenzug genau so verläuft wie die Überlagerung der bei nicht vorhandener Kapazität rücklaufenden Welle mit den von Anfang und Ende der Halterung rückgeworfenen Wellen. Diese die Wirkung der Halterung darstellende Kapazität bzw. Induktivität ist verlustlos anzusetzen, solange der die Halterung darstellende Vierpol, wie vorausgesetzt, keine dämpfenden Glieder besitzt.

Die Belastung der Leitung mit einer verlustlosen Kapazität ist vor allem auf die Phasenverteilung und weniger auf die Amplitude der Spannung längs der Leitung von Einfluß. Die Phasenverteilung wird aber bei nicht zu großem Leitwert des Abschlusses in erster Linie durch die Blindkomponente des Abschlußwiderstandes bestimmt. Hieraus könnte man folgern, daß die durch die Halterung bedingte Störung vor allem bei der Bestimmung des Blindanteiles des Abschlußwiderstandes berücksichtigt werden muß. Aus diesem Grunde ist in der vorliegenden Arbeit der Einfluß der Halterung zunächst auf reine Blindwiderstände als besonders wichtig betrachtet und hauptsächlich behandelt worden. Die Beschränkung auf rein imaginäre Abschlußwiderstände hat zudem den Vorteil, die folgende Theorie wesentlich zu vereinfachen und bedingt relativ leicht zu übersehende Ergebnisse. Nur bei Vorliegen spezieller Halterungsarten ist der Einfluß dieser Halterungen auf die Komponenten eines beliebig komplexen Abschlusses leicht erfaßbar. Dies wird am Beispiel der „ideal kapazitiven“ Halterung ausgeführt. An diesem Beispiel wird gezeigt, daß entgegen der soeben entwickelten Anschauung auch der Realteil des Abschlusses durch die Halterung stark beeinflußt werden kann.

Im folgenden Abschnitt der Arbeit soll zunächst der Einfluß einer verlustlosen Kapazität behandelt werden. In den darauf folgenden Betrachtungen wenden wir uns sodann der Frage zu, in welcher Weise die die Halterung ersetzende Kapazität vom Abschlußwiderstand abhängt. Die Behandlung dieses Problems erfordert die Heranziehung der Vierpoltheorie der Leitung und führt zu wesentlichen Erkenntnissen bezüglich der Bestimmung der Halterungsstörung und der Möglichkeit ihrer Eliminierung zwecks einwandfreier Bestimmung imaginärer Abschlußwiderstände.

2. Der Einfluß einer Kapazität am Ende der Leitung auf die Bestimmung rein imaginärer Abschlußwiderstände.

Der rein imaginäre Abschlußwiderstand sei durch eine positive oder negative Kapazität C, der die Halterung ersetzende Kondensator durch eine Kapazität C_0 dargestellt. Ohne Abschlußwiderstand bewirkt C_0 eine Verschiebung l_0 gemäß der Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{l_0}{\lambda} = Z\,\omega\,C_0. \tag{2a}$$

Mit Abschlußwiderstand erhöht sich die Verschiebung der Spannungsverteilung um die meßbare Strecke l. Es gilt für diese

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{l + l_0}{\lambda} = Z\,\omega\,(C + C_0). \tag{2b}$$

Die Anwendung des Additionstheorems der tg-Funktion auf Gleichung (2b) und die Verwendung von (2a) führt zu

$$\left.\begin{aligned} Z\,\omega\,(C + C_0) &= \frac{\operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} + Z\,\omega\,C_0}{1 - Z\omega C_0 \cdot \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}} \\ Z\,\omega\,C &= \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{1 + (Z\,\omega\,C_0)^2}{1 - Z\,\omega C_0 \cdot \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}}. \end{aligned}\right\} \tag{2c}$$

In Unkenntnis der Störung durch C_0 würde man C nach der Gleichung

$$Z\,\omega\,C_f = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} \tag{2d}$$

bestimmen und den falschen Wert C_f erhalten. Uns interessiert vor allem der auf C_f bezogene Relativfehler, der bei der C-Bestimmung nach Gleichung (2d) erfolgt. Er ist der nach $C_f = \frac{1}{Z\,\omega} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}$ aufgelösten Gleichung (2c)

$$C_f = \frac{C}{1 + \operatorname{tg} 2\pi \frac{l_0}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} 2\pi \frac{l + l_0}{\lambda}} \tag{2e}$$

zu entnehmen und hat den Wert

$$\frac{\Delta C}{C_f} = \frac{C - C_f}{C_f} = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l_0}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} 2\pi \frac{l + l_0}{\lambda}. \tag{2f}$$

Hieraus ersieht man: Der prozentuale Fehler, den man bei Vernachlässigung der Halterungskapazität C_0 begeht, ist proportional C_0, mehr als linear abhängig von der durch $C + C_0$ bedingten Gesamtverschiebung und mehr als quadratisch abhängig von ω. Das Überraschende dieses Ergebnisses ist darin zu sehen, daß vor allem bei großen Kapazitäten C, also bei geringem Anteil der Halterungskapazität an der Gesamtkapazität, der Einfluß von C_0 groß ist. Die Erklärung hierfür ist darin zu erblicken, daß bei großem C und damit großem l nach Gleichung (2b) C empfindlich gegen geringe Änderungen des Argumentes des tg-Ausdruckes ist und die Fortlassung von l_0 hierin demgemäß sich stark bemerkbar macht.

Aus Gleichung (2f) folgt weiterhin, daß für sehr kleine Kapazitäten C und damit l-Werte in der Nähe von Null der Fehler keineswegs Null wird, sondern den endlichen Wert $\mathrm{tg}^2\, 2\pi\, l_0/\lambda$ annimmt. Der Relativfehler wird erst Null, wenn $l = -l_0$ gilt, d. h. wenn l negativ wird bzw. eine Induktivität L die Leitung abschließt. Wie ist dies zu verstehen? Aus der Forderung $l = -l_0$ folgt Gleichheit der Widerstandsbeträge von Induktivität und Halterungskapazität und somit Abschluß der Leitung mit dem unendlich hohen Widerstand eines Sperrkreises. Die Induktivität L macht somit die durch C_0 bedingte Wirkung wieder rückgängig und muß daher mit l_0 bzw. l in den gleichen einfachen Zusammenhang wie C_0 stehen, d. h. sie kann nach der primitiven Formel (2a) oder (2d) bestimmt werden, wobei $1/\omega C = -\omega L$ einzuführen ist.

Als Beispiel für die Wirkung einer nicht gut abgeglichenen Halterung seien einige vom Verfasser an einer Doppeldrahtleitung durchgeführte Messungen mitgeteilt, die die Wirkung einer solchen Halterung gut demonstrieren. Die Halterung ist in Abb. 1 skizziert. Sie schließt eine Doppeldrahtleitung ab, deren Leiter in der Pfeilrichtung gestrafft sind, wobei kleine Verdickungen der Leiter hinter der Halterung ein Durchziehen verhindern. Am Ende sind die Leiter geringfügig ausgehöhlt, um die Einklemmung von Kapazitäten zu ermöglichen. Da einerseits die Leiterverdickungen zu gering sind, um die Selbstinduktion der Leiter merklich zu beeinflussen und andererseits die Leiter ohne Querschnittsänderung die Isolierscheibe durchlaufen, ist der Einfluß der Halterung lediglich durch die DK-Erhöhung des Isoliermaterials gegen 1 bedingt. Die dargestellte Halterung ist daher rein kapazitiv wirksam. Infolgedessen müssen die oben gebrachten Ausführungen auf sie gut anwendbar sein. In der folgenden Tabelle sind die mit 6 verschiedenen Kapazitäten bei 6 Wellenlängen nach Gleichung (2d) bestimmten scheinbaren Kapazitätswerte in pF zusammengestellt. Man erkennt, daß in Übereinstimmung mit der gebrachten Theorie die Kapazitätswerte mit abnehmender Wellenlänge schnell geringer werden, und zwar ist der Abfall um so stärker, je größer die Kapazitäten sind. Jedoch ist selbst bei der kleinsten Kapazität von 0,6 pF der Unterschied zwischen den bei 3 m und 50 cm gewonnenen Werten beträchtlich. Hieraus folgt, daß bei einer nicht gut abgeglichenen Halterung unter allen Umständen die durch sie bedingte Störung erfaßt werden muß, wenn grobe Fehlbestimmungen vermieden werden sollen.

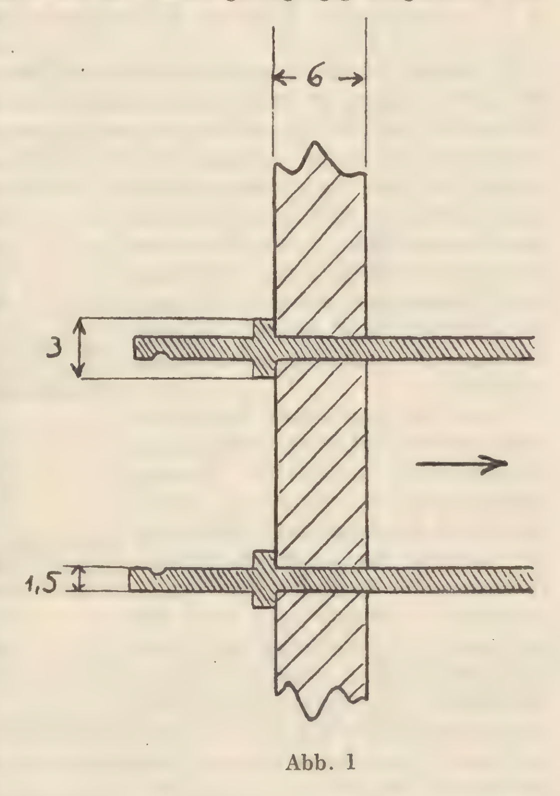


Abb. 1

Ist C_0 bzw. l_0 bekannt, so läßt sich die durch die Halterung bedingte Störung nach Gleichung (2f) in einfacher Weise bestimmen. In dem vorstehend gebrachten Beispiel einer Halterung ist C_0 zweifellos eine vom Abschluß unabhängige Größe. Bei einer verbesserten Halterung, in der die Leiter zwecks Angleich des Wellenwiderstandes der Halterung an den der Leitung verdünnt fortlaufen, ist dies nicht ohne weiteres selbstverständlich. Es ist daher nicht möglich, aus einem Versuch

λ	C 1	C 2	C 3	C 4	C 5	C 6
3 m	0,61	1,1	1,7	2,2	6,0	17,0
2	0,59	1,0	1,7	2,1	5,5	13,6
1,5	0,58	1,0	1,5	2,0	4,9	10,5
1	0,53	0,9	1,4	1,8	3,9	7,2
0,75	0,49	0,9	1,3	1,6	3,1	5,4
0,5	0,45	0,7	1,0	1,2	2,1	2,95

mit einem bekannten C nach Gleichung (2e) l_0 zu bestimmen und anzunehmen, daß bei allen anderen Messungen dieser l_0-Wert gültig ist. Wir müssen daher nunmehr untersuchen, inwieweit l_0 als konstant zu betrachten ist bzw. durch welche Beziehungen Gleichung (2e) zu ersetzen ist, wenn man auf vom Abschluß unabhängige Parameter nicht verzichten will.

3. Wirkung einer dünnen Halterung bei Leerlauf und Kurzschluß.

In diesem Abschnitt sei eine einfache Theorie einer verlustlosen Halterung am Ende der Leitung gebracht, in der angegeben wird, wie groß l_0 bei Leerlauf und Kurzschluß ist. Sie ist auf den in praxi immer gegebenen Fall beschränkt, daß die Halterung nur einen geringen Teil der Wellenverteilung aufnimmt bzw. daß die Dicke der Halterung klein gegen die Wellenlänge im Material der Halterung ist. Die Halterung selbst bestehe aus einer Isolierstütze, in der die Leiter in bekannter Weise[1] mit verändertem Querschnitt fortgeführt werden. In Abb. 2 ist die für Doppelleitungen zweckmäßige Ausführung skizziert.

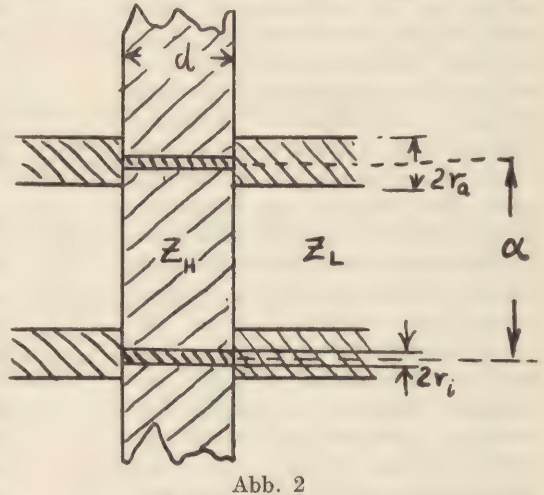


Abb. 2

Unter der gemachten Voraussetzung hinreichend kleiner Dicke der Isolierscheibe wirkt bei offenem Leitungsende die Halterung lediglich durch ihre kapazitive Belastung der Leitung. Da dann am Ort der Halterung ein Minimum der Stromverteilung vorliegt, kann sich die abgeänderte Induktivität der Leiter nicht bemerkbar machen. Umgekehrt wird bei kurzgeschlossenem Leitungsende nur die in der Halterung erfolgte Änderung der Leiterinduktivität und nicht deren Kapazität auf den Strom- und Spannungsverlauf längs der Leitung einwirken. Werden mit C_H und C_L bzw. L_H und L_L die Kapazitäts- und Induktivitätswerte der Leiter pro Längeneinheit inner- und außerhalb der Halterung bezeichnet und mit Δl bzw. Δk die Verschiebung der Spannungsverteilung durch die Halterung bei offenem bzw. kurzgeschlossenem Ende[2], so gilt

$$(L_H - L_L)\, d = \Delta k\, L_L \qquad (3a)$$

$$(C_H - C_L)\, d = \Delta l\, C_L. \qquad (3b)$$

[1] Siehe hierzu die Ausführungen über reflexionsfreie Halterungen in Kapitel III, S. 48.
[2] $\Delta\, l$ ist mit dem l_0-Wert für kleinste Belastungen identisch.

Die erste der beiden Gleichungen folgt so: $(L_H - L_L)$ ist die gesamte durch die Halterung bedingte Änderung der Induktivität, verglichen mit dem Fall, daß L in der Halterung unverändert bleibt. Dieser Zuwachs an L muß durch eine gleich große Selbstinduktionsabnahme am Ende der Leitung wettgemacht werden, wenn die Spannungsverteilung längs der Leitung unverändert und damit der alte Erregungszustand wiederhergestellt werden soll. Dies kann durch eine Kürzung Δk des Endes der Leitung erreicht werden, wobei Δk natürlich so groß gewählt werden muß, daß die gesamte Induktivität des Stückes $\Delta k \cdot L_L$ gleich dem Induktivitätszuwachs in der Halterung ist. Dies führt zu Gleichung (3a). Wird die Leitung am Ende nicht um Δk gekürzt, so muß dafür das andere Ende gekürzt werden, wenn man ein Resonanzverfahren voraussetzt. Auf jeden Fall wird die Spannungsverteilung um den nicht gekürzten-Betrag Δk zum Ende hin wandern. In entsprechender Weise folgt Gleichung (3b).

Es werde gefordert $\Delta l = \Delta k$. Dann folgt aus den Gleichungen (3a) und (3b)

$$\frac{L_H}{L_L} = \frac{C_H}{C_L} \text{ bzw. } Z_H = Z_L. \tag{3c}$$

Da die Gleichheit der Wellenwiderstände Z_H und Z_L bekanntlich eine reflexionsfreie Halterung verbürgt, gilt somit: Sind die durch die Halterung bedingten Längenänderungen in Leerlauf und Kurzschluß gleich, so ist die Halterung reflexionsfrei. Damit ist gezeigt, daß eine C-Zunahme in der Halterung „erlaubt" ist, solange sie mit einer entsprechenden L-Zunahme verbunden ist. Hieraus folgt, daß im Leerlauf nur die Kapazitätsdifferenz $(C_H - C_Z)\,d$ reflektierend wirken kann, wenn die Halterung nicht abgeglichen ist und infolgedessen ihre Kapazität mit der reflexionsfrei wirkenden, aus Gleichung (3c) berechenbaren Kapazität C_Z nicht übereinstimmt. Dieser Kapazitätswert muß durch entsprechende Änderung der Leitungslänge Δl ersetzt werden, wenn die Leitung ohne Halterung gedacht wird. Dabei muß aber noch berücksichtigt werden, daß die Wellenverkürzung im Material um den Faktor $\sqrt{\varepsilon\mu}$ zu einem weiteren Längengewinn von $(\sqrt{\varepsilon\mu} - 1)$ führt. Insgesamt folgt so für den Leerlauf

$$\Delta l \cdot C_L = (C_H - C_Z)\,d + (\sqrt{\varepsilon\mu} - 1)\,d \cdot C. \tag{3d}$$

Dabei ist bekanntlich

$$C_H = K \frac{\varepsilon}{\ln \frac{a}{r_H}}; \quad C_L = K \frac{1}{\ln \frac{a}{r_L}}; C_Z = K \frac{\varepsilon}{\ln \frac{a}{r_Z}}, \tag{3e}$$

wobei K ein Proportionalitätsfaktor ist und r_Z der Radius des Leiters ist, der die Halterung reflexionsfrei wirken läßt. Aus Gleichung (3c) folgt für diesen unter Benutzung der Gleichung (3e) und entsprechender Formeln für L_L und L_Z:

$$\frac{\mu \ln \frac{a}{r_r}}{\frac{\varepsilon}{\ln a/r_Z}} = \frac{\ln \frac{a}{r_L}}{\frac{1}{\ln a/r_L}} \to \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{a}{r_Z} = \ln \frac{a}{r_L}. \tag{3f}$$

Verwenden wir die Gleichung (3f), um in dem Ausdruck für C_Z r_Z durch r_L zu ersetzen, so folgt

$$C_Z = \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{K}{\ln \frac{a}{r_L}} = \sqrt{\varepsilon\mu}\, C_L \tag{3g}$$

und unter Einsetzen dieses in Gleichung (3d) wieder die Beziehung (3a). Die Beziehung (3a) bzw. (3d) läßt sich also auf zwei verschiedene Weisen ableiten: 1. An die Leitung wird einmal die Halterung, dann $\Delta l \cdot C_L$ als Kapazität angelegt und dabei Δl so verlangt, daß die Belastung in beiden Fällen die gleiche ist. Was dabei in der Halterung geschieht, weiß die Meßleitung nicht; 2. Der über C_Z hinausgehende Wert von C_H wird als störend empfunden und die durch ihn bedingte Verschiebung berechnet, wobei die Wellenlängenänderung im Material der Halterung berücksichtigt werden muß. — Beide Betrachtungen sind gleichwertig, ganz analog für den Kurzschlußfall durchführbar und führen zu denselben Beziehungen.

Die Differenz $\Delta l - \Delta k$ erscheint als Mangel derjenigen Verschiebung an $\lambda/4$, die die Spannungsverteilung bei Übergang von Leerlauf zu Kurzschluß erfährt. Sie ist daher mit dem l_0-Wert für Kurzschluß identisch und eine besonders wichtige Größe, da sie gemessen werden kann, ohne daß die Halterung entfernt werden muß, was nur in den seltensten Fällen möglich ist. Aus (3a) und (3b) folgt

$$\Delta l - \Delta k = \left(\frac{C_H}{C_L} - \frac{L_H}{L_L}\right) d. \tag{3h}$$

Gilt Gleichung (3c), so wird, wie schon oben gesagt, $\Delta l - \Delta k = 0$. Die Differenz $\Delta l - \Delta k$ als Funktion der Leiterdimensionen folgt, wenn man in Gleichung (3h) die Beziehungen (3e) einarbeitet:

$$\Delta l - \Delta k = \left(\varepsilon \frac{\ln \frac{a}{r_L}}{\ln \frac{a}{r_H}} - \mu \frac{\ln \frac{a}{r_H}}{\ln \frac{a}{r_L}}\right) d. \tag{3i}$$

Werden in Gleichung (3h) an Stelle der L- und C-Werte die Wellenwiderstände

$$Z_H = \sqrt{\frac{L_H}{C_H}} \qquad Z_L = \sqrt{\frac{L_L}{C_L}}$$

eingeführt, so erhält man

$$\Delta l - \Delta k = \left(\sqrt{\frac{C_H}{L_H}\frac{L_L}{C_L}} - \sqrt{\frac{L_H}{C_H}\frac{C_L}{L_L}}\right)\sqrt{\frac{C_H}{C_L}\frac{L_H}{L_L}}\, d$$

$$\Delta l - \Delta k = \frac{v_L}{v_H}\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right) d.$$

Darin sind v_L und v_H die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in Luft und Halterung. Ihr Quotient hat den Wert $\sqrt{\varepsilon\mu}$,
also wird

$$\Delta l - \Delta k = \sqrt{\varepsilon\mu}\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right) d. \tag{3k}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung ist es möglich, aus $\Delta l - \Delta k$ das Verhältnis der Wellenwiderstände zu bestimmen.

Die vorliegenden Ergebnisse beweisen, daß die in Abschnitt 2 eingeführte Größe l_0 bei Leerlauf und Kurzschluß verschieden anzusetzen ist, wenn Δk von Null verschieden ist. Nach Gleichung (3a) ist dies der Fall, wenn L_L von L_H abweicht. Die einfache Theorie des Abschnittes 2 ist dann nicht als streng gültig zu betrachten. Es ist daher erforderlich, die Wirkung einer Halterung mit abgeändertem L einer ausführlichen Untersuchung zu unterwerfen. Dies kann durch das Studium der Vierpoleigenschaften einer Halterung geschehen.

4. Strenge Theorie einer dämpfungsfreien Halterung.

Bei den folgenden Betrachtungen wird bezeichnet

$$T_H = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon \mu}\, d \qquad T_L = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l. \tag{4a}$$

Dabei ist l die Länge der Meßleitung vom der Leitung abgewandten Ende bis zum Eintritt in die Halterung. T_H ist eine für die Halterung, T_L für die ungestörte Leitung charakteristische Größe. In der weiter oben erwähnten Arbeit hat nun

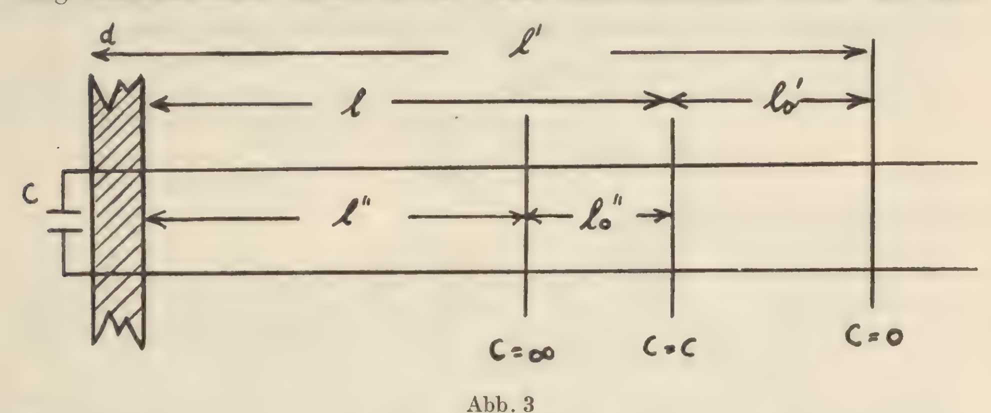


Abb. 3

H. METZLER gezeigt, daß aus den Vierpolgleichungen der am Ende mit einer verlustlosen Halterung und einer Kapazität C belasteten Leitung die Beziehung

$$Z\omega C = \frac{1 - \frac{Z_L}{Z_H} T_H T_L}{\frac{Z_H}{Z_L} T_H + T_L} \tag{4b}$$

folgt. Wir wollen dieses Ergebnis jetzt verwenden und es etwas umformen. Zu diesem Zwecke sei an Stelle der Länge l die Verschiebung l_v, die die Spannungsverteilung erfährt, wenn das freie Ende der Leitung mit C belastet wird, eingeführt. Offenbar gilt $l' = l + l_v'$ wenn l' der Längenwert für freies Ende ($C = 0$) ist. Aus Gleichung (4b) können wir entnehmen, daß $C = 0$ nur dann erfüllt ist, wenn T_L der Beziehung

$$T'_L = \frac{Z_H}{Z_L} \frac{1}{T_H} \tag{4c}$$

genügt. Unter Verwendung dessen folgt aus $l = l' - l'_v$

$$T_L = \frac{T_L' - T_v'}{1 + T_v' T_L'} = \frac{\frac{Z_H}{Z_L} - T_v' T_H}{T_H + T'_v \frac{Z_H}{Z_L}} \tag{4d}$$

und unter Einführung dieses in Gleichung (4b) nach kurzer Zwischenrechnung

$$Z\omega C = T_v' \frac{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2_H}{1 + T^2_H + T_H T_v' \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right)}. \tag{4e}$$

In Anlehnung an die Definition des Abschnittes 2 definieren wir jetzt die Größe l_0' durch die Beziehung

$$Z\omega C = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda}(l_v + l_0') - \operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda} l'_0$$

$$Z\omega C = \frac{T_v' + T_0'}{1 - T_v' T_0'} - T_0 = T_v \frac{1 + T_0'^2}{1 - T_v' T_0'}, \tag{4f}$$

wobei $T_0' = \operatorname{tg}(2\pi/\lambda) l_0'$ bezeichnet wird. Die Vereinigung der Gleichungen (4e) und (4f) gestattet T_0' als Funktion von T_v' zu berechnen. Es folgt so aus

$$\frac{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2_H}{1 + T^2_H + T_H T_v' \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right)} = \frac{1 + T_0'^2}{1 - T_v' T_0'}$$

nach einigen Zwischenschritten

$$T'_0 = \frac{\left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T_H + T_v' \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right) - T_H}{\left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T_v' T_H - T_v' T_0' \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right) + \frac{(1 + T_H^2) T_0' + T_v'}{T_H}}. \tag{4g}$$

Führt man denselben Gedankengang durch, in dem aber an Stelle der Verschiebung der Spannungsverteilung gegen den Leerlauffall l_v' die gegen den Fall des Kurzschlusses l_v'' in Gleichung (4b) eingeführt wird, so liefert die ganz analog verlaufende Rechnung an Stelle von Gleichung (4e) wegen $l'' + l_v'' = l$ (Siehe Abb. 3)

$$Z\omega C = \frac{1}{T_v'} \frac{1 + T^2_H + T_H T_v'' \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right)}{1 + \left(\frac{Z_H}{Z_L}\right)^2 T^2_H}. \tag{4h}$$

Wird andererseits die Größe l''_0 durch die Beziehung

$$\frac{1}{Z\omega C} = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l_v'' + l_0''}{\lambda} - \operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda} l_0'' = T_v'' \frac{1 + T_0''^2}{1 - T_v'' T_0''} \tag{4i}$$

eingeführt, so folgt durch Vergleich mit Gleichung (4h) die (4g) analoge Beziehung

$$T_0'' = \frac{\left(\frac{Z_H}{Z_L}\right)^2 T_H + T_v'' \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right) - T_H}{\left(\frac{Z_H}{Z_L}\right)^2 T_v'' T_H - T_v'' T_0'' \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right) + \frac{(1 + T^2_H) T_0'' + T_v''}{T_H}}. \tag{4k}$$

Aus den Gleichungen (4e), (4g), (4h) und (4k) lassen sich eine Reihe interessanter Erkenntnisse herleiten:

1. Der Quotient von (4e) und (4h) führt zu

$$T_v' T_v'' = \frac{(1 + T^2_H)^2 + (1 + T^2_H)\left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right) T_H (T_v' + T_v'') + T^2_H \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T_v' T_v''}{1 + T^4_H + T^2_H \left[\left(\frac{Z_H}{Z_L}\right)^2 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2\right]}.$$

Wäre keine Halterung vorhanden, so würde man C aus den Größen l_v' und l''_v richtig nach den Beziehungen $Z\omega C = T_v' = 1/T_v''$ bestimmen können. Der störende Einfluß der Halterung bewirkt, daß man die falschen Ergebnisse

$$Z\omega C' = T_v' \qquad Z\omega C'' = \frac{1}{T_v''} \tag{4l}$$

erhält. Offenbar ist $C'/C'' = T_v' T_v''$. Von einer leidlich einwandfrei hergestellten Halterung läßt sich sagen, daß ihr störender Einfluß gering ist. Daher muß C'/C'' und damit auch $T_v' T_v''$ seinen Wert in der Nähe von 1 haben. Außerdem sind ε, μ und d bei einer guten Halterung so klein, daß T_H wesentlich kleiner als 1 ist[1] und der Wellenwiderstand Z_H so wenig von Z_L verschieden, daß Z_H/Z_L nahe bei 1 liegt. Unter Verwendung dieser Annahme erhält man als brauchbaren Näherungswert für das Produkt $T_v' T_v''$ den Ausdruck

$$T_v' T_v'' = \frac{C'}{C''} = 1 + T_H (T_v' + T_v'') \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right). \tag{4m}$$

Ein Beispiel soll zeigen, wie gut Gleichung (4m) die exakte Formel ersetzt: $Z_L/Z_H = 1{,}41$ und $T_H = {}^1/_{10}$ sind die Daten einer nicht besonders guten Halterung. Mit diesen Werten wird der Nenner der exakten Gleichung um 2,5% größer als 1 und der Zähler um fast den gleichen Prozentsatz größer als Gleichung (4m). Damit folgt, daß Gleichung (4m) auf wenigstens einige Promille genau stimmt. Gleichung (4m) gestattet in einfacher Weise das Wellenwiderstandsverhältnis Z_H/Z_L zu errechnen. Nach ihr ist der störende Einfluß der Halterung um so größer, je höher der Wert von T_H und $(Z_H/Z_L - Z_L/Z_H)$ ist.

2. Bezeichnen wir

$$T({}_v' + {}_v'') = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (l_v' + l_v'')$$

so folgt aus $l_v' + l''_v = l' - l''$ (Abb. 3!)

$$T({}_v' + {}_v'') = \frac{T_L' - T_L''}{1 + T_L' T_L''} = \frac{\frac{1}{T_H}\frac{Z_H}{Z_L} + T_H \frac{Z_H}{Z_L}}{1 - \left(\frac{Z_H}{Z_L}\right)^2}$$

$$T({}_v' + {}_v'') = \frac{1 + T^2_H}{T_H} \; \frac{1}{\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}}. \tag{4n}$$

Die Beziehung (4n) stellt eine Verallgemeinerung der Gleichung (3k) dar. Man erhält die letztere aus (4n), wenn man, wie dies bei der Ableitung von (3k) getan wurde, eine dünne Halterung voraussetzt und anstelle der Längendifferenz zwischen Leerlauf und Kurzschluß den Unterschied dieser Größe gegen $\lambda/4$, oben mit $\Delta l - \Delta k$ bezeichnet, einführt. Dann kann T^2_H neben 1 vernachlässigt werden und man erhält aus Gleichung (4n)

$$\frac{1}{T({}_v' + {}_v'')} = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta l - \Delta k) = T_H \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right).$$

[1] Die meisten Halterungen werden aus Trolitul hergestellt ($\varepsilon = 2{,}5$). Hierfür folgt, daß $T_H < 0{,}1$ gilt, wenn $d < 0{,}01\,\lambda$ ist. Bei Leitungen für $\lambda > 50$ cm, für die vor allem Halterungen gebraucht werden, ist dies leicht zu erfüllen ($d < 5$ mm).

Ersetzt man hierin weiter die Tangens-Ausdrücke durch ihre Argumente, was wegen deren Kleinheit erlaubt ist, so folgt Gleichung (3k). Da $l_v' + l_v''$ der Längenunterschied zwischen Leerlauf- und Kurzschlußfall ist, stellt Gleichung (4n) einen Zusammenhang zwischen T_H, Z_H/Z_L und $l' - l''$ dar, mit dessen Hilfe aus zweien dieser Größen die dritte einfach bestimmbar ist. Sie hat vor Gleichung (4m) den Vorteil, daß zwei Längenablesungen statt dreier genügen, um T_H oder Z_H/Z_L zu ermitteln.

3. Vergleicht man die Formeln (4e) und (4h) für Werte von Z_H/Z_L, die so wenig von 1 abweichen und so kleine T_H-Werte, daß der Zähler des Bruches von Gleichung (4e) praktisch übereinstimmt mit dem Nenner des Bruches der Gleichung (4h), so erkennt man: Die Bestimmung der Kapazität C nach der Näherungsformel $Z\omega C = T_v'$ ist genauer als die nach der Gleichung $Z\omega C = 1/T_v''$, wenn $T_v' < T_v''$ gilt und umgekehrt. Kleine Kapazitäten werden also zweckmäßig aus der „Leerlaufformel" $Z\omega C = T_v'$ und große Kapazitäten aus der „Kurzschlußformel" $Z\omega C = 1/T_v''$ berechnet. Der Relativfehler bei Verwendung der einfachen Formeln (4l) ist in guter Näherung proportional T_v' bzw. T_v'' und proportional dem Produkt $T_H\,(Z_H/Z_L - Z_L/Z_H)$. Nach Gleichung (4e) bzw. (4h) ist er bei Verwendung der zweckmäßigen Näherungsformel kleiner als

$$T^2_H\left[\left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 - 1\right] + T_H\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right) = T_H\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right)\left(1 + T_H\frac{Z_L}{Z_H}\right),$$

wenn die Abweichungen von Zähler und Nenner der Quotienten (4e) bzw. (4h) von 1 gering sind.

4. In der Beziehung (4m) und bei Abschätzung des Relativfehlers der Gleichungen (4l) tritt das Produkt $T_H\,(Z_H/Z_L - Z_L/Z_H)$ besonders in Erscheinung. Es sei nun gezeigt, daß ihm eine unmittelbare physikalische Bedeutung zukommt. Betrachten wir wiederum den praktisch meist gegebenen Fall, daß T_H klein gegen 1 ist. Dann zeigt unter der weiteren Annahme kleinen T_0'-Wertes der Vergleich von (4e) und (4f), daß

$$T_0' = T_H\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right)$$

gilt. Die exakte Forderung für die Gültigkeit dieser Beziehung ist, daß die Abweichung der Zähler von (4e) und (4f) gegen 1 klein ist gegen die Abweichungen der Nenner von 1. Dies ist der Fall, wenn außer $T_H \ll 1$ die Ungleichung

$$\left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T_H \ll T'_v\left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right)$$

und

$$T_0' \ll T'_v$$

gilt. Weicht Z_H/Z_L nicht sehr von 1 ab, so werden beide Gleichungen erfüllt, wenn $T_H \ll T'_v$ gilt, wie man erkennt, wenn an Stelle von T_0 der Ausdruck $T_H\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right)$ verwendet wird. Da in allen praktisch auftretenden Fällen T_H klein und Z_H nahe bei Z_L ist, ergibt sich als Gültigkeitsbereich das Gebiet $T'_v \gg T_H$. Läßt man die Forderung $T_H \ll 1$ fallen, so erhält man für sehr große T'_v-Werte den exakten Ausdruck

$$T_0' = \frac{T_H}{1 + T^2_H}\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right), \qquad (4o)$$

wie aus Gleichung (4n) folgt, wenn dort $T(v' + v'')$ durch $1/T_0'$ ersetzt wird. — In Gleichung (4o) können wegen der Kleinheit der T-Ausdrücke diese durch ihr Argument ersetzt werden und $T^2{}_H$ gegen 1 vernachlässigt werden:

$$l_0' = \sqrt{\varepsilon\,\mu}\, d\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right). \qquad (4\text{p})$$

Die Korrekturgröße l_0' steht also in einem sehr einfachen Zusammenhang mit der Dicke der Halterung d und dem Wellenwiderstandsverhältnis Z_L/Z_H. Als wichtigste Folgerung aus Gleichung (4p) ergibt sich: Ist $l_v' \gg \sqrt{\varepsilon\mu}\, d$, so ist die Korrekturgröße l_0' unabhängig von l_v. Die am Ende von Abschnitt 2 gestellte Frage läßt sich also dahingehend beantworten, daß die mit einer bekannten, genügend großen Kapazität C bestimmte l_0'-Größe bei allen anderen Blindwiderständen, die $l_v' \gg \sqrt{\varepsilon\mu}\, d$ bedingen, als Korrekturgröße verwendet werden darf. Vergleicht man die Beziehungen (3k) und (4p), so erkennt man, daß im Falle $T_v' \gg T_H$ die Differenz $\Delta\, l - \Delta\, k$ mit l_0' identisch wird. Dies ist verständlich, da entsprechend ihrer Definition die Differenz $\Delta\, l - \Delta\, k$ gleich dem l_0'-Wert für den Fall des Abschlusses der Leitung mit $C = \infty$ sein muß, denn die richtige Bestimmung von C nach Gleichung (2d) erfordert sowohl die Korrektur des Leerlaufes um $\Delta\, l$, wie auch die des Kurzschlusses (angeschlossene Kapazität ∞!) um $\Delta\, k$. Da aber, wie eben gezeigt, l_0' im Gebiet großer Kapazitäten C nicht von C abhängt, folgt: Für $l_v' \gg \sqrt{\varepsilon\mu}\, d$ ist die Korrekturgröße l_0' identisch mit dem bei Übergang von Leerlauf zu Kurzschluß sich ergebenden Mangel der Spannungsverschiebung an $\lambda/4$.

5. Nachdem wir T'_0 im Gebiet $T_v' \gg T_H$ abgeschätzt haben, sei es im Bereich $T_v' \ll T_H$ untersucht. An dem Grenzfall $T_v' = G$, der zu

$$T_0' = \frac{T_H}{\sqrt{1 + T^2{}_H}} \sqrt{\left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 - 1} \qquad (4\text{q})$$

führt, erkennt man, daß T_0' und T_H von gleicher Größenordnung sind. Damit folgt aus der Bedingungsgleichung $T_v' \ll T_H$ die Beziehung $T_v' \ll T_0'$. Verwendet man dies in Gleichung (4g) und berücksichtigt man, daß $T_H \ll 1$ vorausgesetzt werden darf, so erhält man wiederum die Gleichung (4q). Die Beziehung (4q) ist also nicht nur für $T_v' = 0$, sondern im gesamten Bereich $T_v' \ll T_H \ll 1$ gültig. Bildet man den Quotienten Q der T_0'-Werte (4o) und (4q), so erhält man

$$Q = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{Z_H}{Z_L}\right)^2}{1 + T^2{}_H}}.$$

Hieraus folgt, daß der T_0'-Wert für kleine Verschiebungsgröße T_v' stets größer als für große T_v'-Werte ist, es sei denn, daß $Z_L = Z_H$ und $T_H = 0$ ist, d. h., daß keine Halterung vorliegt.

6. Es erhebt sich nunmehr die Frage, wie T_0' von T_v' in dem Bereich, der durch die Beziehungen (4o) und (4q) nicht erfaßt wird, abhängig ist. Zwecks Klärung dessen bringen wir Gleichung (4g) in die Form

$$T_0'^2\left[1 + T^2{}_H - T_v'\, T_H\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right)\right] + T_0' T_v'\left[1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2{}_H\right] - T^2{}_H\left[\left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 - 1\right] -$$

$$T_v\; T_H\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right) = 0 \qquad (4\text{r})$$

und machen von dem bekannten Satz Gebrauch, daß die Ableitung einer Funktion $F(x,y) = 0$ aus den partiellen Ableitungen F_x und F_y gemäß der Regel $F_x\,dx + F_y\,dy = 0$ gewonnen werden kann. So erhält man

$$\frac{d\,T_0'}{d\,T_v'} = -\frac{T_0'\left[1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2_H\right] - T_H\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right)\left(1 + T_0'^2\right)}{2\,T_0'\left[1 + T^2_H - T_v'\,T_H\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right)\right] + T_v'\left[1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2_H\right]}. \tag{4s}$$

Da $T_v' < T(v' + v'')$ gilt, folgt aus Gleichung (4n), daß die Ungleichung

$$T_v'\,T_H\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right) < 1 + T^2_H$$

gültig ist und daß infolgedessen der Nenner der Beziehung (4s) stets positiv ist. Setzt man den T_0'-Wert von Gleichung (4o) in den Zähler ein, so erhält man

$$\frac{T_H}{1 + T^2_H}\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right)\left[1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2_H - (1 + T^2_H)(1 + T_0'^2)\right].$$

Dieser Wert ist positiv, wenn $Z_L > Z_H$ gilt (was wir im folgenden voraussetzen wollen), da die Annahme eines positiven Vorzeichens der eckigen Klammer sich nach wenigen Zwischenschritten auf die immer gültige Ungleichung $(1 + T^2_H)\frac{Z_L}{Z_H} > \frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}$ zurückführen läßt. Für den T_0'-Wert der Gleichung (4o) wird also die Ableitung dT_0'/dT_v' negativ. Das gleiche Resultat ergibt sich für den T_0'-Wert der Gleichung (4q), da der Zähler der Beziehung (4s) dann gleich

$$\left[1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2_H\right]\frac{T_H}{1 + T^2_H}\sqrt{\left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 - 1}\left[\sqrt{1 + T^2_H} - \sqrt{1 - \left(\frac{Z_H}{Z_L}\right)^2}\right]$$

wird und somit ebenfalls positiv ist. Da sowohl für kleine als auch große T_v'-Werte dT_0'/dT_v' negativ ist, erscheint ein monotoner Verlauf von T_0' in Abhängigkeit von T_v' wahrscheinlich. Wir wollen nunmehr zeigen, daß dies tatsächlich der Fall ist, indem wir beweisen, daß die Ableitung dT_0'/dT_v' nicht Null werden und somit ihr Vorzeichen nicht wechseln kann. Der Beweis läßt sich indirekt führen. Würde die Ableitung gleich Null, so müßte nach Gleichung (4s)

$$T'_0\left[1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2_H\right] = T_H\left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right)(1 + T_0'^2) \tag{4t}$$

gelten. Geht man hiermit in Gleichung (4r) ein, so erhält man mit

$$T_0'^2\,(1 + T^2_H) = T^2_H\left[\left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 - 1\right]$$

einen T'_0-Wert, der von T_v' unabhängig ist und mit dem der Gleichung (4q) übereinstimmt. Dies bedeutet, daß die Ableitung dT_0'/dT_v' nur dann gleich Null wird, wenn sie bei allen T_v'-Werten verschwindet, d. h. wenn T_0' konstant bleibt. Dies wiederum ist unmöglich, wie die Berechnung des Quotienten aus den T'_0-Werten für kleine und große T_v'-Werte gezeigt hat. Damit ist bewiesen: Die Größe T'_0 sinkt von ihrem Wert für $T_v' = 0$ monoton ab auf den Wert, der bei dem größtmöglichen T_v' gegeben ist. Die Wirkung einer Halterung läßt sich also um so besser durch einen konstanten T'_0-Wert beschreiben, je weniger die Werte (4o) und (4q) voneinander abweichen. Sind also die Wellenwiderstände

der Leitung Z_L und der Halterung Z_H so abgeglichen, daß der Unterschied der Beziehungen (4o) und (4q) gering ist, so kann der durch die Halterung bedingte Fehler durch eine praktisch vom Abschlußwiderstand der Leitung nur wenig abhängige Kapazität verursacht gedacht werden.

5. Kapazitive und induktive Halterungen.

Bei den Untersuchungen des letzten Abschnittes haben wir uns auf den Fall beschränkt, daß der Wellenwiderstand der Leitung größer als der der Halterung ist. Nur wenn dies der Fall ist, liefert die Beziehung (4q) einen reellen T'_0-Wert und nur für diesen Fall wurde der monotone Verlauf von T'_0 bewiesen. Ist dagegen Z_L kleiner als Z_H, so wird nach Formel (4e) $Z\omega C < T_v'$. Der Ansatz (4f) vermag dem nicht gerecht zu werden, da sich kein reelles T'_0 angeben läßt, für das $1 + T'^2_0 < 1 - T_v' T'_0$ erfüllt werden kann, wenn T_v' so klein ist, wie es bei der Ableitung von (4q) vorausgesetzt wurde. Daraus geht hervor: Ist Z_L kleiner als Z_H, so kann zumindest bei Abschlußkondensatoren, die eine geringe Verschiebung bedingen, keine Kapazität positiven oder negativen Wertes angegeben werden, die, dem Abschlußkondensator parallelgeschaltet, die gleiche Wirkung wie die Halterung hervorruft. Wir wollen nunmehr zeigen, daß die Halterungen, für die $Z_L < Z_H$ gilt, durch dem Abschlußwiderstand in Reihe geschaltete Selbstinduktionen ersetzt werden können. Es sei daher jetzt die in Abb. 4 dargestellte Ersatzschaltung diskutiert.

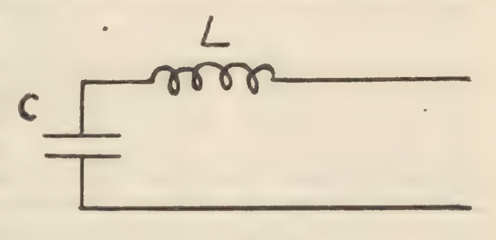


Abb. 4

Die gesamte durch L und C_L bedingte Verschiebung der Spannungsverteilung l_g wird bestimmt durch die Beziehung

$$\mathrm{Tg} = \mathrm{tg}\, 2\pi \frac{\mathrm{lg}}{\lambda} = Z\,|\mathfrak{G}|, \tag{5a}$$

wobei der Betrag des kompletten Leitwertes $\mathfrak{G}$ gegeben ist durch

$$\frac{1}{|\mathfrak{G}|} = \frac{1}{\omega C} - \omega L. \tag{5b}$$

Die Verschiebung l_g ist identisch mit der durch Anschalten von C_r bedingten meßbaren Verschiebung l'_0, da ohne C_r die Selbstinduktion sich in einem Spannungsbauch bzw. Stromknoten befindet und somit keinerlei Einfluß auf die Spannungsverteilung haben kann. Würde L sich nicht an einem offenen Ende befinden, sondern anstelle von C die Leitung abschließen, so würde es eine Verschiebung l bedingen, die durch die Beziehung

$$T_L = \mathrm{tg}\, 2\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{Z}{\omega L}$$

gegeben ist. Wegen der Idendität von l_g und l_v' folgt somit aus Gleichung (5a) und (5b)

$$\frac{1}{T_v'} = \frac{1}{Z\omega C} - \frac{1}{T_L}$$

$$Z\omega C = T_v' \frac{1}{1 + \frac{T_v'}{T_L}} . \tag{5c}$$

Durch Vergleich mit Gleichung (4e) folgt für T_L die Bedingungsgleichung

$$1 + \frac{T_v'}{T_L} = \frac{1 + T^2{}_H + T_H\, T_v' \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right)}{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2{}_H}$$

und hieraus

$$\frac{T_v'}{T_L} = T^2{}_H \frac{1 - \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2}{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2{}_H} + T_v' \frac{T_H \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right)}{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2{}_H} . \tag{5d}$$

Der Relativfehler, der ohne Berücksichtigung der Halterung mit der Beziehung $Z\omega C = T_v'$ begangen wird und der nach Gleichung (5c) durch T_v'/T_L gegeben ist setzt sich hiernach aus zwei Gliedern additiv zusammen. Das erste ist kleiner als $T^2{}_H$ und von T_v' unabhängig, das zweite ist T_v' proportional. Die Größe T_L selbst, hat den Wert

$$T_L = \frac{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2{}_H}{T_H \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right) + \frac{T^2{}_H}{T_v'} \left[1 - \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2\right]} . \tag{5e}$$

Sie ist also ebenso wie T_0' von T_v' abhängig. Im Gegensatz zu T_0' wird sie für $T_v' = 0$ zu Null. Bei hinreichend kleinem T_v' ist sie dieser Größe proportional:

$$T_L (T_v' \approx 0) = T_V' \frac{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2{}_H}{T^2{}_H \left[1 - \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2\right]} . \tag{5f}$$

Sie steigt monoton mit T_v' an, um bei großem T_v' sich asymptotisch dem Wert

$$T_L (T_v' \approx \infty) = \frac{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2{}_H}{T_H \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right)} \tag{5g}$$

zu nähern. Der Wert $T'_v = \infty$ wird durch die endliche Kapazität, die der Bedingung $\omega^2 LC = 1$ genügt, hergestellt. Denn bei Vorliegen dieses Kapazitätswertes ist die L-C-Reihenschaltung in Resonanz, d. h. die Leitung wird kurzgeschlossen. Wird C größer, so wird T_v' negativ und nimmt schließlich den in Gleichung (4n) angegebenen Wert an. Hierfür wird aus Gleichung (5c)

$$T_L (C = \infty) = \frac{1 + \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2{}_H}{T_H \left(\frac{Z_H}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_H}\right) + T^2{}_H \left[1 - \left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2\right] \frac{T_H}{1 + T^2{}_H} \left(\frac{Z_L}{Z_H} - \frac{Z_H}{Z_L}\right)}$$

$$\frac{1}{T_L}(C=\infty)=\frac{T_H}{1+T^2_H}\left(\frac{Z_H}{Z_L}-\frac{Z_L}{Z_H}\right). \tag{5h}$$

Dies stimmt bis auf das Vorzeichen mit den Werten von und T_0' für große T_v' überein.

Unter der Voraussetzung $Z_H > Z_L$ sind die Ausdrücke (5e) bis (5h) alle positiv. Wegen der monotonen Abhängigkeit der Größe T_L von T_v' ist damit bewiesen, daß für alle T_v' sich eine positive Selbstinduktion L angeben läßt, die in Reihe mit dem Abschluß geschaltet, die Wirkung der Halterung hervorruft. Allerdings ist die Größe T_L sehr von T_v' abhängig (Gleichung 5f!). Da die in Abschnitt 4 für Halterungen mit $Z_H < Z_L$ eingeführte, die Halterung ersetzende Kapazität weit weniger von T_v' abhängt, ist die praktische Bedeutung ihrer Einführung wesentlich größer als die der Größe T_L.

Da die Wirkung von Halterungen mit $Z_H > Z_L$ durch eine Selbstinduktion und die von Halterungen mit $Z_H < Z_L$ durch eine Kapazität hervorgerufen werden kann, erscheint es sinnvoll, Halterungen der ersten Art als induktive und solche der zweiten Art als kapazitive Halterungen zu bezeichnen. Die Ergebnisse der Abschnitte 4 und 5 lassen sich daher wie folgt zusammenfassen: Die Wirkung einer kapazitiven Halterung kann durch eine dem Abschluß parallel geschaltete Kapazität ebenfalls hervorgerufen werden. Die Größe dieser Kapazität ist umso geringfügiger vom Abschluß abhängig, je dünner die Halterung und je besser ihr Abgleich ist. Die Wirkung einer induktiven Halterung dagegen kann durch eine dem Abschluß in Reihe geschaltete Selbstinduktion verursacht werden, deren Wert in starkem Maße vom Abschluß abhängig ist.

Aus Gleichung (5d) folgt ebenso wie aus Gleichung (4e), daß besonders bei großen T_v'-Werten, also bei großen Abschlußleitwerten, die Halterung eine starke Korrektur der ohne Halterung gültigen Formel $Z\omega C = T_v'$ erforderlich macht. Das im Abschnitt 2 unter Voraussetzung einer ideal kapazitiven Halterung gewonnene Ergebnis erfährt demnach seine Erweiterung auf alle Arten von Halterungen. Dies gilt für beliebige rein imaginäre Abschlußwiderstände. Wir haben zwar immer den Fall einer angeschlossenen Kapazität C betrachtet, jedoch wurde an keiner Stelle vorausgesetzt, daß C positiv ist. Die Theorie umfaßt also auch negative C-Werte oder, was dasselbe ist, am Ende der Leitung angeschlossene Induktivitätswerte.

Abschließend sei die Frage beantwortet, in welchem T_v'-Bereich der Fehler der Beziehung $Z\omega C = T_v'$ praktisch gleich Null ist. Betrachten wir die für kapazitive Halterungen gültige Gleichung (4f), so sieht man, daß dies für $T_0' = -T_v'$ der Fall ist. Das bedeutet, daß Abschlußwiderstände, die ungefähr die gleiche Verschiebung mit umgekehrten Vorzeichen bedingen, wie sie durch die Halterung allein hervorgerufen wird, einwandfrei nach der Formel $Z\omega C = T_v'$ bestimmt werden. Der Abschlußwiderstand hat also sozusagen die durch die Halterung bedingte Verschiebung rückgängig zu machen bzw. er muß mit der Halterung zusammen die Leitung mit einem unendlich großen Abschlußwiderstand abschließen. Bei einer kapazitiven Halterung muß der Abschluß somit durch eine Selbstinduktion gebildet werden. Wie hängt nun $T_0' = T_v'$ von Z_L, Z_H und T_H ab? Die Beantwortung dieser Frage ist mit Hilfe von Gleichung (4e) möglich. Aus dieser folgt mit $Z\omega C = T_v'$

$$\left(\frac{Z_L}{Z_H}\right)^2 T^2_H = T^2_H + T_H\, T_v' \left(\frac{Z_H}{Z_L}-\frac{Z_L}{Z_H}\right)$$

$$T_v' = -\frac{Z_L}{Z_H}\, T_H\,. \tag{5i}$$

Bei einer induktiven Halterung folgt aus den Gleichungen (5c) und (5f), daß für sehr kleine T_v' die Formel $Z\omega C \doteq T_v'$ praktisch richtig ist. Außerdem verschwindet die Korrekturgröße T_v/T_L nach Gleichung (5d), wenn die Beziehung (5i) gilt. Dies ist selbstverständlich, da die Ableitung von (5i) nichts über den kapazitiven oder induktiven Charakter der Halterung voraussetzte und drückt den trivialen Fall aus, daß $T_L = \infty$ bzw. $L = 0$ wird, wie aus Gleichung (5e) folgt.

Fassen wir das Hauptergebnis dieses Absatzes nochmals kurz zusammen: Kapazitive Halterungen ($Z_L > Z_H$) gestatten die durch sie verursachte Störung durch einen Kapazitätswert darzustellen, der dem Abschlußwiderstand parallel geschaltet ist und im allgemeinen nur gering vom Abschluß der Leitung abhängt. Induktive Halterungen dagegen ($Z_H > Z_L$) gestatten nicht die Einführung praktisch wenig variabler Korrekturgrößen. Hieraus folgt die wichtige Vorschrift: Ist es nicht möglich, eine Halterung ideal zu gestalten ($Z_H = Z_L$), so soll man die Konstruktion der Halterung so ausführen, daß die Halterung kapazitiv wirkt.

6. Die Wirkung einer ideal kapazitiven Halterung auf die Komponenten eines beliebig komplexen Abschlußwiderstandes.

In den vorangegangenen Abschnitten dieser Arbeit wurde ein rein imaginärer Abschluß der Leitung vorausgesetzt. Für nicht rein imaginären Abschluß erfährt die gebrachte Theorie eine wesentliche Komplizierung. Ist indessen die Halterung „ideal kapazitiv“, d. h. läßt sie sich durch eine Kapazität C_0 ersetzen, die unabhängig vom Abschlußwiderstand ist, so ergeben sich übersichtliche Beziehungen. Dieselben sollen nunmehr entwickelt werden. Der Abschluß bestehe aus der Parallelschaltung einer Kapazität C mit einem Widerstand $R = 1/G$. Der mit der Halterung zusammen gegebene Endwiderstand der Leitung hat somit die Leitfähigkeit

$$\mathfrak{G} = G + j\omega\,(C + C_0). \tag{6a}$$

Wie an anderer Stelle gezeigt[1], besteht zwischen dem Wellenverhältnis W der Spannungsverteilung und der Verschiebung der Verteilung $l + l_0$ gegenüber dem unbelasteten Fall einerseits und $\mathfrak{G}$ andererseits der folgende Zusammenhang:

$$Z\,\mathfrak{G} = \mathrm{Tg}\,\frac{x + j\,\varphi}{2},$$

wobei $x/2 = \mathrm{ArcTg}\,W$ und $\varphi = 4\pi\,(l + l_0)/\lambda$ gilt und Z der Wellenwiderstand der Leitung ist. Somit folgt

$$Z\,\mathfrak{G} = j\mathrm{tg}\,2\pi\,\frac{l + l_0}{\lambda} - j\,\mathrm{ArcTg}\,W. \tag{6b}$$

Dabei ist l die bei Anbringung des Abschlusses hervorgerufene Verschiebungsgröße und l_0 die durch die Halterung bedingte. Für letztere gilt natürlich

$$Z\omega C_0 = \mathrm{tg}\,2\pi\,\frac{l_0}{\lambda}.$$

Verwendet man dies sowie Gleichung (6a), so folgt nach Auftrennung in die Komponenten der komplexen Gleichung (6b) nach kurzer Rechnung:

[1] Siehe hierzu Kapitel V.

$$ZG = W\frac{1+\mathrm{tg}^2\, 2\pi\frac{l+l_0}{\lambda}}{1+W^2\,\mathrm{tg}^2\, 2\pi\frac{l+l_0}{\lambda}} \tag{6c}$$

$$Z\omega C = \mathrm{tg}\, 2\pi\frac{l+l_0}{\lambda}\;\frac{1-W^2}{1+W^2\,\mathrm{tg}^2\, 2\pi\frac{l+l_0}{\lambda}} - \mathrm{tg}^2\, 2\pi\frac{l_0}{\lambda}. \tag{6d}$$

Vergleicht man diese Beziehungen mit den ohne Halterung gültigen, die man erhält, wenn $l_0 = 0$ gesetzt wird, so erkennt man: **Die Größen G und $C + C_0$ werden nach den bekannten Formeln, die die Halterung nicht berücksichtigen, richtig bestimmt, wenn l durch $l + l_0$ ersetzt wird.**

Es sei nunmehr der durch das Auftreten von l_0 bedingte Fehler der Gleichungen, die ohne Halterung gültig sind, diskutiert. Die letzteren Gleichungen lauten offenbar

$$ZG_f = W\frac{1+\mathrm{tg}^2\, 2\pi\frac{l}{\lambda}}{1+W^2\,\mathrm{tg}^2\, 2\pi\frac{l}{\lambda}} \tag{6e}$$

$$Z\omega C_f = \mathrm{tg}\, 2\pi\frac{l}{\lambda}\cdot\frac{1-W^2}{1+W^2\,\mathrm{tg}^2 2\pi\frac{l}{\lambda}}. \tag{6f}$$

Wir wenden uns zunächst dem Ausdruck (6c) zu. Die Anwendung des Additionstheorems der tg-Funktion führt nach einigen Zwischenschritten mit den Abkürzungen $T_l = \mathrm{tg}\, 2\pi\, l/\lambda$ und $T_0 = \mathrm{tg}\, 2\pi\, l_0/\lambda$ zu

$$ZG = W\frac{1+T_l^2}{1+W^2 T_l^2}\;\frac{1+T_0^2}{1+\frac{T_0^2\,(T_l^2+W^2) - 2\,T_l\,T_l\,(1-W^2)}{1+W^2\,T_l^2}}. \tag{6g}$$

Setzt man die bei einer leidlich guten Halterung immer erfüllte Ungleichung

$$l_0 < 1{,}6\,\frac{\lambda}{100} \quad\longrightarrow\quad T_0 < 0{,}1 \tag{6h}$$

voraus, so folgt, wie der Vergleich von (6e) und (6g) zeigt, mit mindestens 1% Genauigkeit, daß der Relativfehler der nach (6e) bestimmten G-Größe durch

$$\frac{\Delta G}{G} = T_0\,\frac{T_0\,(T_l^2+W^2) - 2\,T_l\,(1-W^2)}{1+W^2\,T_l^2} \tag{6i}$$

gegeben ist. Dieser Ausdruck ist monoton von W abhängig, denn seine Ableitung nach W^2 ist entweder immer oder nie gleich Null. Infolgedessen ist es auch der Quotient, um den sich die Beziehungen (6e) und (6g) unterscheiden. Die extremen Werte dieses Quotienten ergeben sich für $W = 0$ und $W = 1$ mit $(1+T_0^2)/(1-T_lT_0)^2$ und 1. Wegen der Kleinheit von T_0 ist der erste Ausdruck praktisch identisch mit $1 + 2\,T_l\,T_0$. Somit folgt: **Wird die Halterung nicht berücksichtigt, so erhält man zu kleine Leitwerte. Der Fehler wird umso größer, je kleiner W ist, d. h. er ist vor allem bei geringen Leitwerten zu berücksichtigen. Sein Relativwert ist in guter Näherung maximal gleich $2\,T_l\,T_0$.**

Die Diskussion des Einflusses der Halterung auf die Bestimmung von C führt zu folgenden Ergebnissen: Aus Gleichung (6d) werde der Ausdruck (6f) herausgezogen. Es folgt

$$Z\omega C = \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} \frac{1 - W^2}{1 + W^2 \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l}{\lambda}}$$

$$\left[\frac{1 + W^2 T_l^2}{T_l} \frac{\operatorname{tg} 2\pi \frac{l + l_0}{\lambda}}{1 + W^2 \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{l + l_0}{\lambda}} - \frac{T_0}{T_l} \frac{1 + W^2 T_l^2}{1 - W^2}\right]$$

$$\frac{C}{C_f} = \frac{T_l + T_0}{T_l(1 - T_l T_0)} \frac{1 + W^2 T_l^2}{1 + W^2 \left(\frac{T_l + T_0}{1 - T_l T_0}\right)^2} - \frac{T_0}{T_l} \frac{1 + W^2 T_l^2}{1 - W^2}. \tag{6k}$$

Mit zunehmendem W nimmt der Quotient C/C_f monoton ab. Für $W = 0$ hat er den uns bereits bekannten Wert

$$\frac{C}{C_f}(W = 0) = \frac{T_l + T_0}{T_l(1 - T_l T_0)} - \frac{T_0}{T_l} = \frac{1 + T_0^2}{1 - T_l T_0} \tag{6l}$$

ist also größer als 1 und hat bei nicht zu großem Produkt T_0 in erster Näherung den Wert $1 + T_l T_0$. Der Vergleich dieses Ausdruckes mit dem für G gültigen zeigt uns, daß der Relativfehler von G_f etwa doppelt so groß ist wie der von C_f, wenn W klein ist. Wird W größer, so sinkt C/C_f monoton auf den Wert Null und wird dann negativ. Der Wert Null wird erreicht, wenn

$$W^2 = \frac{\operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}}{\operatorname{tg} 2\pi \frac{l + l_0}{\lambda}} \tag{6m}$$

gilt, wie man sich durch Einsetzen in Gleichung (6d) leicht überzeugen kann. Da der Unterschied von $\operatorname{tg} 2\pi\, l/\lambda$ und $\operatorname{tg} 2\pi\,(l+l_0)/\lambda$ wegen der Kleinheit von l_0 bei nicht zu großen Werten von l gering ist, muß der W-Wert (6m) nahe bei l liegen. Es ergibt sich somit folgendes Resultat: Bei sehr kleinen W-Werten ist der Relativfehler für C, der ohne Berücksichtigung der Halterung begangen wird, etwa gleich $T_0 T_l$. Mit anwachsendem W wird er kleiner, bis $C = C_f$ wird. Sodann wird C kleiner als C_f, um bei dem in der Nähe von 1 gelegenen W-Wert (6m) gleich Null zu werden. Während also bei kleineren W-Werten[1] der Fehler von C_f kleiner als für $W = 0$ ist, nimmt er für größere W beträchtliches Ausmaß an. Für größeres W ist also der Einfluß der Halterung auf C wesentlich stärker als auf G. Seine Erfassung durch Anwendung der Beziehung (6d) ist unbedingt erforderlich.

7. Zusammenfassung.

Im vorliegenden Kapitel wird untersucht, wie eine am Ende einer Meßleitung befindliche Halterung bei der Bestimmung von Blindwiderständen zu berücksichtigen ist. Die Ergebnisse können wie folgt formuliert werden:

[1] Unter kleineren W-Werten sind solche verstanden, die kleiner als der durch Gleichung (6 m) gegebene Wert sind.

1. Läßt sich die Halterung durch eine verlustlose, vom Abschluß praktisch unabhängige Kapazität C_0 ersetzen, so folgt für den ohne Berücksichtigung der Halterung begangenenen Relativfehler der Wert $\operatorname{tg}(2\pi/\lambda)\, l_0 \cdot \operatorname{tg}(2\pi/\lambda)\,(l + l_0)$, wenn l und l_0 die durch Abschluß und Halterung bedingten Verschiebungen der Spannungsverteilung sind. Der Relativfehler ist also vor allem bei den Abschlüssen groß, die eine große Verschiebung bedingen. Er muß, dies ist das Ergebnis einiger quantitativer Angaben, bei nicht gut abgeglichenen Halterungen unbedingt erfaßt werden.

2. Eine Halterung ist nur dann reflexionsfrei, wenn die durch sie bedingten Verschiebungen der Spannungsverteilung bei offenem und geschlossenem Leitungsende den gleichen Betrag haben und umgekehrt bedingt Gleichheit der Verschiebungen Reflexionsfreiheit. Die Spannungsverteilung bei Leerlauf ist dann genau um $\lambda/4$ gegen die bei Kurzschluß vorliegende verschoben.

3. Jede Halterung, deren Wellenwiderstand kleiner als der der Leitung ist, („kapazitive" Halterung), kann durch eine dem Abschluß parallel geschaltete Kapazität ersetzt werden. Diese Kapazität ist umso geringer vom Abschluß abhängig, je dünner die Halterung und je kleiner ihr *DK*-Wert sowie ihr Wellenwiderstand ist. Sie ist monoton abhängig von der durch den Abschluß bedingten Verschiebung. Es werden die Beziehungen für den Einfluß der Halterung und die Größe der Ersatzkapazität abgeleitet. Ferner wird angegeben, wie das Wellenwiderstandsverhältnis einfach bestimmt werden kann.

4. Jede Halterung, deren Wellenwiderstand größer als der der Leitung ist („induktive" Halterung), kann durch eine mit dem Abschluß in Reihe gelegte Selbstinduktion ersetzt werden. Im Gegensatz zu der Ersatzkapazität kapazitiver Halterungen ist diese Selbstinduktion stark vom Abschluß abhängig. Während also bei nicht zu schlecht abgeglichener kapazitiver Halterung dieselbe in guter Näherung durch eine konstante Kapazität darstellbar ist, kann Entsprechendes bei induktiven Halterungen nicht durchgeführt werden.

5. Die Wirkung einer ideal kapazitiven Halterung kann auch bei beliebigem komplexem Leitungsabschluß leicht angegeben werden. Die Korrektur der Leitfähigkeitskomponente, die durch die Halterung bedingt wird, ist gering. Sie ist am größten für $W = 0$ und für große W-Werte praktisch gleich Null. Die Korrektur der Blindkomponente dagegen ist für $W = 0$ zwar geringer als die Leitfähigkeitskorrektur, wird mit ansteigendem W ebenfalls zunächst kleiner, um dann aber beträchtlich anzusteigen. Die Erfassung der durch die Halterung bedingten Korrekturen geschieht am einfachsten dadurch, daß in den ohne Halterungen gültigen Gleichungen die Verschiebungsgröße l um den durch die Halterung bedingten Wert l_0 vermehrt und die Blindkomponente um die Halterungskapazität C_0 korrigiert wird.

Kapitel V.

AUSWERTEVERFAHREN ZUR BESTIMMUNG DER ELEKTRISCHEN UND MAGNETISCHEN STOFFKONSTANTEN IM DEZIMETERWELLENGEBIET.

1. Allgemeines.

Die Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten (*DK*) und Leitfähigkeit von biologischem Material bei ultrahohen Frequenzen ist zur Klärung des hier vorliegenden Mechanismus der Stromleitung unerläßlich. Bekanntlich ebenso wichtig ist die Ermittlung der beiden elektrischen Konstanten von Elektrolyten zur Prüfung der von Debye entwickelten Vorstellungen. Es seien daher im folgenden die vom Verfasser als besonders zweckmäßig erkannten Verfahren zusammengestellt, mit deren Hilfe Reihenuntersuchungen durchgeführt werden können. In Anbetracht der Tatsache, daß für viele Fragestellungen auch die eventuell von eins abweichende Permeabilität sowie der magnetische Verlust interessiert, soll zunächst die Frage behandelt werden, wie sich sowohl elektrische als auch magnetische Stoffkonstanten bestimmen lassen. Es wird dann gezeigt, wie sich die Methoden vereinfachen lassen, wenn nur die dielektrischen Qualitäten interessieren oder sonstige Voraussetzungen wie geringe Probendicke, geringe Verluste usw. erfüllt sind.

Die Definition der *DK* ε ist bekannt als Quotient der Kapazitäten eines mit dem betreffenden Material ausgefüllten Kondensators und des gleichen Kondensators mit dem Dielektrikum Luft. In gleicher Weise ist auch die Permeabilität μ als Quotient zweier Induktivitäten definiert[1]. Die elektrischen Verluste können dargestellt werden durch einen dem Kondensator parallelgeschalteten ohmschen Leitwert G. Sie sind auf verschiedenste Ursachen zurückführbar (polare Molekeln, inhomogene Struktur, Ionen). Entsprechend kann man die magnetischen Energieverluste symbolisch darstellen durch einen mit einer Spule der Induktivität μL in Serie geschalteten ohmschen Widerstand R. Die magnetischen Verluste werden bekanntlich hervorgerufen u. a. durch Wirbelströme und Hysterese. Zur Charakterisierung der Verluste wird der Verlustfaktor benutzt. Er ist definiert als das Verhältnis der Wirkleistung zur Blindleistung. Elektrischer und magnetischer Verlustfaktor sind daher gegeben durch die Beziehungen

$$\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = \frac{G}{\omega C \varepsilon} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \vartheta_\mu = \frac{R}{\omega L \mu},$$

wenn ω die Kreisfrequenz ist.

Neben ε, μ und den Verlustfaktoren erweist es sich als zweckmäßig, die komplexen *DK*- und Permeabilitätswerte ε^+ und μ^+ einzuführen. Die komplexe *DK* erhalten wir durch ein Verfahren, das der bekannten Einführung komplexer Leitfähigkeiten entspricht. Wir definieren sie durch die Beziehung

$$\varepsilon^+ = \varepsilon\,(1 - j \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon).$$

Entsprechend erweist es sich als zweckmäßig, die komplexe Permeabilität μ^+ durch

$$\mu^+ = \mu\,(1 - j \operatorname{tg} \vartheta_\mu)$$

einzuführen.

[1] Vielfach werden die oben definierten Werte ε und μ auch als relative *DK* und Permeabilität ε_r und μ_r bezeichnet.

Wir benutzen somit in der Arbeit die folgenden Bezeichnungen:

$R, G, \mu L, \varepsilon C$	Widerstand, Ableitung, Selbstinduktion und Kapazität pro Längeneinheit der Probe
d	Probendicke
α	Winkelmaß der Probe
β	Dämpfungsmaß der Probe
$\gamma = \beta + j\alpha$	Fortpflanzungsmaß
$\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = \frac{G}{\omega \varepsilon C}$	dielektrischer Verlustfaktor
$\operatorname{tg} \vartheta_\mu = \frac{R}{\omega \mu L}$	magnetischer Verlustfaktor
$\varepsilon^+ = \varepsilon (1 - j \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon)$	komplexe *DK*
$\mu^+ = \mu (1 - j \operatorname{tg} \vartheta_\mu)$	komplexe Permeabilität
$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$	Wellenwiderstand der Meßleitung
$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{R + j\omega\mu L}{G + j\omega\varepsilon C}}$	Wellenwiderstand in der Probe
$\mathfrak{R}_L$ bzw. $\mathfrak{R}_K$	komplexer Eingangswiderstand der Probe im Leerlauf- bzw. Kurzschlußfall
$P = \rho e^{-j\varphi}$	Reflexionsfaktor, der durch den Probeneingangswiderstand bestimmt wird
$W = \frac{U_{\text{min.}}}{U_{\text{max.}}}$	Wellenverhältnis (bei Abtastverfahren definiert!)
B	die Knotenbreite ist gleich dem Abstand der zu beiden Seiten des Spannungsminimums gelegenen Stellen, an denen die Spannung um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als im Minimum ist (bei Abtastverfahren definiert)
l bzw. k	Verschiebung, die die Spannungsverteilung bei offener bzw. kurzgeschlossener Leitung erfährt, wenn die Leitung mit der Probe belastet wird (bei Abtastverfahren definiert).

Wellenverhältnis, Knotenbreite und Betrag des Reflexionskoeffizienten ρ sind voneinander abhängige Größen: Infolge der Reflexion an der Materialprobe und der dadurch bedingten rücklaufenden Welle kommt es zu einer stehenden Wellenverteilung. In den Maxima dieser Verteilung wird die hinlaufende Welle offenbar phasenrichtig um ihren ρ-fachen Wert vermehrt, in den Minima vermindert. Infolgedessen gilt

$$W = \frac{U_{\text{min.}}}{U_{\text{max.}}} = \frac{1-\rho}{1+\rho} \text{ bzw. } \rho = \frac{1-W}{1+W}. \tag{1}$$

Ebenso bekannt wie dieser Zusammenhang ist das Gesetz der Spannungsverteilung längs der Leitung[1]

[1] Siehe z. B. K. S. Knol und M. J. O. Strutt, Physica IX, Juni 1942, p. 577.

$$U^2 = U_0^2 \left[1 + \rho^2 + 2\,\rho \cos\left(4\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi\right) \right], \tag{2}$$

aus der sich der Zusammenhang zwischen W und B

$$\frac{1}{W^2} = 1 + \frac{1}{\sin^2 \pi \frac{B}{\lambda}} \tag{3}$$

leicht herleiten läßt. Die analog wie die Knotenbreite im Maximum definierbare ,,Bauchbreite" hat den Vorteil, als Maximumgröße weniger störanfällig zu sein, aber den wesentlichen Nachteil, wegen des flachen Spannungsverlaufes in der Nachbarschaft des Maximums nicht genau meßbar zu sein. Sie wird daher nicht benutzt. Weiterhin ist der Zusammenhang zwischen l bzw. k und φ bekannt: Es ist

$$\varphi_L = 4\,\pi \frac{l + d}{\lambda} \quad \varphi_K = 4\,\pi \frac{k + d}{\lambda} - \pi. \tag{4}$$

Der Index L bzw. K deutet darauf hin, ob die Probe an dem der Meßleitung abgewandten Ende offen oder kurzgeschlossen ist. Auch Gl. (4) ist evident: Durch die Probe wird ein Teil der Spannungsverteilung aufgeschluckt. Dieser Teil der Spannungsverteilung könnte ebenso gut durch eine Fortsetzung der Leitung um $l + d$ über den Probenanfang hinaus (bzw. um l vom Probenende aus) aufgenommen werden, ohne daß sich die ,,Phasenverteilung" längs der Meßleitung ändert. Da aber einer Längenänderung λ die Phasenänderung $2\,\pi$ entspricht, muß der Länge $l + d$ die Phase $2\,\pi\,(l+d)/\lambda$ gleichwertig sein. Da ferner die Welle auf ihrem Hin- und Rückweg die Gesamtlänge $2\,(l + d)$ durchlaufen muß, wenn die Probe durch ein Leitungsstück ersetzt wird, ergibt sich für die gesamte Phasendrehung der doppelte Wert der Gleichung (4). Bei der Berechnung der ,,Kurzschlußphase" φ_K gilt Gleiches. Nur muß noch berücksichtigt werden, daß die äquivalente Leitungslänge $k + d$ an ihrem Ende entsprechend der Definition von k kurzgeschlossen zu denken ist, die Spannung am Ende also einen zusätzlichen Phasensprung um π erfährt.

Die im folgenden gebrachten Auswerteverfahren haben Gültigkeit für Lecherleitungen in offener und geschlossener Bauweise. Sie gelten für das meist gebräuchliche ,,Abtastverfahren", bei dem die Spannungsverteilung längs einer Lecherleitung mit Hilfe einer verschiebbaren Sonde untersucht wird, und auch für das Resonanzverfahren, bei dem die Meßleitung auf Resonanz abgestimmt und die Resonanzkurve ausgemessen wird. Bei Verwendung von Resonanzverfahren ist in den folgenden Formeln das Wellenverhältnis W durch eine andere Größe zu ersetzen. Ein vom Verfasser entwickeltes Verfahren[1], das besonders übersichtlich ist, fordert einfach den Ersatz der Knotenbreite B durch die Resonanzkurvenbreite $2\,\Delta l$, die in 0,7-facher Höhe des Maximalwertes der Resonanzkurve bestimmt wird. Es gilt somit für das gesamte Verfahren ohne Einschränkung:

$$B = 2\,\Delta l\,; \frac{1}{W^2} = 1 + \frac{1}{\sin^2 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda}}. \tag{5}$$

Die Phasenbetrachtung gilt in gleicher Weise für das Resonanzverfahren. Bei diesem wird die Verschiebung bestimmt, die mit der Kurzschlußbrücke am der Probe abgewandten Leitungsende vorgenommen werden muß, um die Leitung bei Belastung mit der Probe wieder auf Resonanz abzustimmen. Es ist physikalisch einleuchtend und auch mathematisch ableitbar, daß diese Verschiebung übereinstimmen muß

[1] H. SCHWAN, Theoretische Behandlung der Resonanzverfahren zur Bestimmung komplexer Widerstände bei Dezimeterwellen [1945].

mit der durch die Probe bedingten Verschiebung der Spannungsverteilung längs der Leitung. Auch hierauf soll näher im Bericht über das Resonanzverfahren eingegangen werden. Zusammenfassend gilt: Alle im folgenden für das Abtastverfahren angegebenen Formeln gelten auch für das Resonanzverfahren, wenn das Wellenverhältnis mit Hilfe von Gleichung (5) durch die Resonanzkurvenbreite ersetzt wird. Vorausgesetzt wird, daß die zu untersuchende Probe am Ende der Leitung sitzt und die Leitungsdimensionen in der Probe unverändert bleiben[1]. Biologisches Material oder Flüssigkeiten werden hierbei von „Wänden" eingefaßt, die nicht reflektieren. Wie solche Wände beschaffen sein müssen, ist in Kapitel IV dargelegt.

2. Allgemeines Auswerteverfahren ohne Verwendung komplexer tg-Tafeln.

Die Berechnung der Materialkonstanten vollzieht sich in zwei Schritten: Zunächst wird aus den Werten der Spannungsverteilung der Eingangswiderstand der Probe im Leerlauf- und Kurzschlußfall ermittelt. Die Leitung selbst weiß dabei nicht, wie diese Eingangswiderstände zustandekommen, ob durch einen punktförmigen komplexen Abschluß oder durch die Probe. Dann wird aus den Eingangswiderständen auf die Materialkonstanten mit Hilfe der Kenntnis der Probendicke d geschlossen.

A. Zusammenhang zwischen Eingangswiderstand und Spannungsverteilung.

Bekanntlich gilt für den Eingangswiderstand die Beziehung

$$\mathfrak{R} = \frac{1+p}{1-p} Z = Z \frac{1+\rho e^{-j\varphi}}{1-\rho e^{-j\varphi}}\,{}^{2)}\,. \tag{6}$$

Hieraus folgt nach kurzer Zwischenrechnung, bei der der Nenner reell gemacht wird:

$$\frac{\mathfrak{R}}{Z} = \frac{1-\rho^2 - j\cdot 2\rho\sin\varphi}{1+\rho^2-2\rho\cos\varphi}. \tag{7}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und der Beziehungen (1) und (4) lassen sich Real- und Imaginärteil von $\mathfrak{R}_L$ und $\mathfrak{R}_K$ bestimmen[3]. Aus diesen wiederum folgen bei hinreichend kleiner Probendicke die Materialkonstanten der Probe in einfacher Weise. Sie sind Real- und Imaginärteil von $\mathfrak{R}_L$ und $\mathfrak{R}_K$ bzw. deren reziproken Werten proportional. Was dabei unter „hinreichend" zu verstehen ist, wird weiter unten eingehend erörtert werden. Liegt ein punktförmig konzentrierter Abschlußwiderstand vor, so sind dessen Komponenten mit denen von $\mathfrak{R}_L$ natürlich identisch.

Für die weitere allgemeine Auswertung ist es zweckmäßig, Betrag r und Phase ϑ von $\mathfrak{R}/Z$ anzugeben. Es folgt aus Gleichung (7) leicht

$$r^2 = \frac{1+\rho^2+2\rho\cdot\cos\varphi}{1+\rho^2-2\rho\cdot\cos\varphi} \tag{8a}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{2\rho}{1-\rho^2}\sin\varphi. \tag{8b}$$

Wird an Stelle von ρ das Wellenverhältnis W nach Gleichung (1) eingeführt, so folgt nach wenigen Zwischenschritten

[1] Siehe Abbildung 4 der Einleitung!
[2] Siehe z. B. VILBIG, Lehrbuch der HF-Technik.
[3] Siehe hierzu Näheres Seite 101 f.

$$r^2 = \frac{1 + W^2 + (1 - W^2)\cos\varphi}{1 + W^2 - (1 - W^2)\cos\varphi} \tag{8c}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{1 - W^2}{2W}\sin\varphi. \tag{8d}$$

B. Berechnung der Materialkonstanten aus $\mathfrak{R}_L$ und $\mathfrak{R}_K$.

Aus der Vierpoltheorie der Leitung bekannt ist (Tg hyperbolischer Tangens!)

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{R}_L \cdot \mathfrak{R}_K} \tag{9}$$

$$\operatorname{Tg}\gamma d = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}_K}{\mathfrak{R}_L}} \tag{10}$$

Aus Gleichung (9) folgt wegen $\mathfrak{R}/Z = r \cdot \epsilon^{j\vartheta}$

$$\frac{\mathfrak{Z}}{Z} = \sqrt{r_L r_K} \cdot e^{\frac{j}{2}(\vartheta_L + \vartheta_K)} \tag{9a}$$

und aus Gleichung (10)

$$\operatorname{Tg}(\beta + j\alpha) = \sqrt{\frac{r_K}{r_L}} \cdot e^{\frac{j}{2}(\vartheta_K - \vartheta_L)}. \tag{10a}$$

α und β lassen sich hieraus bestimmen, wenn auf den Tg-Ausdruck das Additionstheorem der Tg-Funktion angewandt wird. Dann folgt unter Fortlassung einiger Zwischenrechnungen, wie von anderer Seite bewiesen,

$$\operatorname{Tg} 2\beta d = \frac{2\sqrt{\frac{r_K}{r_L}}}{1 + \frac{r_K}{r_L}} \cdot \cos\frac{\vartheta_K - \vartheta_L}{2} \tag{10b}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha d = \frac{2\sqrt{\frac{r_K}{r_L}}}{1 - \frac{r_K}{r_L}} \cdot \sin\frac{\vartheta_K - \vartheta_L}{2}. \tag{10c}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (9a) bis (10c) lassen sich $\mathfrak{Z}/Z$ und γ ohne Verwendung komplexer Tafeln berechnen.

Weiter gilt bekanntlich für γ

$$\gamma^2 = (R + j\omega\mu L)(G + j\omega\varepsilon C). \tag{11}$$

Wegen der Definition von ε^+ und μ^+ und wegen $1/\sqrt{LC} = c$ ist dies identisch mit

$$\gamma = j\,\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon^+ \mu^+}\,. \tag{11a}$$

Andererseits folgt aus der Definition von $\mathfrak{Z}$

$$\frac{\mathfrak{Z}}{Z} = \sqrt{\frac{\mu^+}{\varepsilon^+}}\,. \tag{11b}$$

Multiplikation und Division der Gleichungen (11a) und (11b) ergeben

$$\gamma \frac{\mathfrak{Z}}{Z} = j \frac{2\pi}{\lambda} \mu^+ \tag{12a}$$

$$\gamma \frac{Z}{\mathfrak{Z}} = j \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon^+. \tag{12b}$$

Die Auftrennung dieser beiden Beziehungen in die reellen und imaginären Komponenten unter Verwendung von (9a) liefert das Endresultat in der Form:

$$\mu = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{r_L r_K} \left[\alpha \cos \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} + \beta \sin \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2}\right] \tag{13a}$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r_L r_K}} \left[\alpha \cos \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} - \beta \sin \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2}\right] \tag{13b}$$

$$\mu \operatorname{tg} \vartheta_\mu = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{r_L r_K} \left[\beta \cos \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} - \alpha \sin \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2}\right] \tag{13c}$$

$$\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r_L r_K}} \left[\beta \cos \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} + \alpha \sin \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2}\right] \tag{13d}$$

$$\vartheta_\mu = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} \tag{13e}$$

$$\vartheta_\varepsilon = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2}. \tag{13f}$$

Die Gleichung (13d) liefert die elektrische Leitfähigkeit in $\Omega^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1}$ auf Grund folgender Beziehung:

$$\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = \frac{G}{\omega C} = 4\pi\, 9 \cdot 10^{11} \frac{\varkappa}{\omega} = 60\,\lambda\,\varkappa\,. \tag{13g}$$

Das im vorstehenden niedergelegte Rechenverfahren erfordert eine umfangreiche Rechenarbeit: Die in den Gleichungen (8c) und (8d) niedergelegten Größen r und $\operatorname{tg}\vartheta$ bedingen in Leerlauf und Kurzschluß 20 primitive Rechenoperationen und 6 Tabellenwerte. α und β erfordern weitere 12 primitive und 4 Tabellenoperationen (Gleichungen 10b und 10c!) und die Gleichungen (13a), (13b), (13e) und (13f) insgesamt 13 primitive und 3 Tabellenoperationen. Alles in allem sind also für die vier Materialkonstanten ε, μ, ϑ_ε und ϑ_μ 45 primitive Operationen und 14 Tabellenwerte erforderlich. Ein Teil dieser Arbeit kann durch graphische Methoden ersetzt werden. Dies betrifft vor allem die Ermittlung der Eingangswiderstände: Bekanntlich[1] bilden die geometrischen Orte gleicher ρ-Werte und gleicher φ-Werte ein System orthogonaler Kreisscharen, wenn auf Abszisse und Ordinate die Komponenten des komplexen Eingangsleitwertes dargestellt werden. Diese Kreisscharen gestatten als Polarkoordinaten, auch Betrag und Phase, also die uns interessierenden Größen, zu entnehmen. Da sie aber die gesamte Koordinatenebene ausfüllen, kommt es häufig vor, daß man Bereiche der Darstellung aufsuchen muß, die entweder überhaupt nicht oder nur ungenau auf dem Diagramm enthalten sind. Aus diesem Grunde ist es zweckmäßig, das die Koordinatenebene ausfüllende Diagramm auf einen Einheitskreis abzubilden. Es entsteht infolge der Koordinatentransformationen aber der Nachteil, daß zwar die cartesischen, nicht aber die Polarkoordinaten von $\mathfrak{R}$ bzw $1/\mathfrak{R}$ entnommen werden können. Um zu diesen zu gelangen, sind also zusätzlich 4 primitive Rechenoperationen und 1 Tabellenwert je im Leerlauf und Kurzschluß

[1] Siehe hierzu z. B. die obengenannte Arbeit von Knol und Strutt.

erforderlich, also insgesamt 10 Operationen. Da die Bestimmung von ρ und φ ebenfalls einige Rechenoperationen erfordert, bedeutet also die Benutzung des letzterwähnten Diagramms etwa eine Halbierung der Rechenarbeit, die zur Ermittlung des Eingangswiderstandes erforderlich ist. Da sich nun aber gerade die durch das Diagramm abgenommene Arbeit der Ermittlung der Rechtwinkelkomponenten bei zweckmäßiger Umformung von Gleichung (7) in den meisten praktischen Fällen ganz wesentlich herabsetzen läßt, wie weiter unten gezeigt wird, und diese Arbeit nur etwa ein Viertel der insgesamt aufzuwendenden Rechenarbeit darstellt, haben wir hier in Anbetracht der hohen Anforderungen, die an ein gutes Diagramm zu stellen sind, ein solches nicht in Gebrauch genommen.

Abschließend sei angegeben, wie sich das angeführte Verfahren vereinfacht, wenn die Proben keine Verluste aufweisen, d. h. wenn $\vartheta_\varepsilon = \vartheta_\mu = 0$ gilt. Aus den Gleichungen (13e) und (13f) folgt, daß dann $\beta = \vartheta_L + \vartheta_K = 0$ wird. $\beta = 0$ wiederum bedingt nach Gleichung (10b) $\cos\frac{\vartheta_K - \vartheta_L}{2} = 0$ bzw. $\sin\frac{\vartheta_K - \vartheta_L}{2} = \pm 1$. Da α eine positive Größe ist, folgt somit aus Gleichung (10a)

$$\operatorname{tg} \alpha d = \sqrt{\frac{r_K}{r_L}}. \tag{14a}$$

Die Gleichungen (13a) und (13b) lauten wegen $\vartheta_L + \vartheta_K = 0$

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\alpha}{\sqrt{r_K r_L}} \tag{14b}$$

$$\mu = \frac{\lambda}{2\pi} \alpha \sqrt{r_K r_L}. \tag{14c}$$

Im dämpfungsfreien Fall ist $W = 0$. Die r-Werte folgen also aus der vereinfachten Gleichung (8c):

$$r^2 = \frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}. \tag{14d}$$

Die Berechnung von ε und μ erfordert insgesamt 17 Rechenoperationen.

3. Allgemeines Auswerteverfahren unter Verwendung komplexer tg-Tafeln.

Aus der Gleichung (6)

$$\mathfrak{R} = Z \frac{1 + \rho e^{-j\varphi}}{1 - \rho e^{-j\varphi}} \tag{6}$$

folgt mit $\rho = e^{-x}$

$$\mathfrak{R} = Z \frac{1 + e^{-(x + j\varphi)}}{1 - e^{-(x + j\varphi)}} = Z \operatorname{Ctg} \frac{x + j\varphi}{2}. \tag{15}$$

Der Eingangswiderstand $\mathfrak{R}$ der Gleichung (15) ist sozusagen von der Leitungsseite her berechnet. Er läßt sich von der Probe her bekanntlich in der Form angeben:

$$\mathfrak{R}_L = \mathfrak{Z} \operatorname{Ctg} \gamma d \qquad \mathfrak{R}_K = \mathfrak{Z} \operatorname{Tg} \gamma d. \tag{16}$$

Die Zusammenfassung der Gleichungen (15) und (16) liefert:

$$\mathfrak{Z} \operatorname{Ctg} \gamma d = Z \operatorname{Ctg} \frac{x_L + j\varphi_L}{2} \tag{17a}$$

$$\mathfrak{Z}\,\mathrm{Tg}\,\gamma\,d = Z\,\mathrm{Ctg}\,\frac{x_K + j\,\varphi_K}{2}\,. \tag{17b}$$

Hierin ist

$$\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}\ln\rho = \mathrm{Ar\,Tg}\,W, \tag{18a}$$

wie mittels des Integraltheorems der Ar Tg-Funktion $\mathrm{Ar\,Tg}\,W = \int \frac{dW}{1-W^2}$ durch Differenzieren von $\ln\rho = \ln\frac{1-W}{1+W}$ und $\mathrm{Ar\,Tg}\,W$ nach W leicht abgeleitet werden kann. Auf Grund der Beziehungen (4) und (18a) lassen sich die Argumente in den Formeln (17) umformen zu

$$\frac{x_L + j\,\varphi_L}{2} = j\,\frac{\varphi_L - j\,x_L}{2} = j\left[2\,\pi\frac{l+d}{\lambda} - j\,\mathrm{Ar\,Tg}\,W_L\right] = j\,L \tag{18b}$$

$$\frac{x_K + j\,\varphi_K}{2} = j\,\frac{\varphi_K - j\,x_K}{2} = j\left[2\,\pi\frac{k+d}{\lambda} - j\,\mathrm{Ar\,Tg}\,W_K - \frac{\pi}{2}\right] = j\left(K - \frac{\pi}{2}\right). \tag{18c}$$

Die durch Gleichung (18b) und (18c) definierten Größen L und K sollen im folgenden als „Leerlauf"- bzw. „Kurzschlußgröße" bezeichnet werden. Sie sind unmittelbar durch die Messung gegeben. Werden L und K in den Gleichungen (17) eingeführt und dabei Gebrauch gemacht von den Gleichungen (11a) und (11b)

$$\mathfrak{Z} = Z\sqrt{\frac{\mu^+}{\varepsilon^+}} \tag{11a}$$

$$\gamma = j\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon^+\,\mu^+}, \tag{11b}$$

so erhält man nach wenigen Schritten

$$\sqrt{\frac{\varepsilon^+}{\mu^+}}\,\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi\,d}{\lambda}\sqrt{\varepsilon^+\,\mu^+}\right) = \mathrm{tg}\,L \tag{19a}$$

$$\sqrt{\frac{\mu^+}{\varepsilon^+}}\,\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi\,d}{\lambda}\sqrt{\varepsilon^+\,\mu^+}\right) = \mathrm{tg}\,K\,. \tag{19b}$$

Durch Multiplikation von (19a) mit (19b) folgt

$$\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi\,d}{\lambda}\sqrt{\varepsilon^+\,\mu^+}\right) = \sqrt{\mathrm{tg}\,L\cdot\mathrm{tg}\,K}\cdot \tag{19c}$$

bzw.

$$\sqrt{\varepsilon^+\,\mu^+} = \frac{\lambda}{2\pi\,d}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\mathrm{tg}\,L\cdot\mathrm{tg}\,K}. \tag{19d}$$

Macht man hiervon Gebrauch, so erhält man durch Multiplikation mit (19a)

$$\varepsilon^+\,\mathrm{tg}\,\frac{2\pi\,d}{\lambda}\sqrt{\varepsilon^+\,\mu^+} = \frac{\lambda}{2\,\pi\,d}\,\mathrm{tg}\,L\cdot\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\mathrm{tg}\,L\cdot\mathrm{tg}\,K}\,.$$

Wird hierin wiederum von (19c) Gebrauch gemacht, so folgt

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon^{+} = \operatorname{tg} L \,\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}}{\sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}} \tag{20a}$$

und entsprechend

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\mu^{+} = \operatorname{tg} K \,\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}}{\sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}}\,. \tag{20b}$$

Die Bestimmung des Betrages und der Phase von komplexer *DK* und Permeabilität mit Hilfe der komplexen Gleichungen (20) erfordert insgesamt 18 Rechenoperationen, darunter 6 Tabellenoperationen, wenn die komplexen Funktionen $\operatorname{tg} z$ und $\frac{\operatorname{arctg} z}{z}$ tabelliert vorliegen. Die tg-Funktion muß dabei als Eingang in rechtwinkligen und als Ausgang in Polarkoordinaten angegeben sein, die Funktion $\frac{\operatorname{arctg} z}{z}$ ist zweckmäßig in Eingang und Ausgang in Polarkoordinaten angegeben. In dem Tabellenwerk von HAWELKA[1] ist die Funktion $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x + j\,y\right) = t \cdot j^{\tau}$ niedergelegt, die Funktion $\frac{\operatorname{arc\,tg} z}{z}$ dagegen ist unseres Wissens nirgends tabelliert. Aus diesem Grunde hat sich H. METZLER der Arbeit unterzogen und die Funktion $\frac{1}{t \cdot j^{\tau}} \operatorname{arc\,tg}(t \cdot j^{\tau}) = r \cdot j^{\rho}$ in dem interessierenden Bereich berechnet. Am Ende der Arbeit (S. 123) ist das Ergebnis angeführt, um es der allgemeinen Benutzung zugänglich zu machen.

Die folgende Seite enthält ein Formblatt, wie es hier zur Auswertung Verwendung findet. Bei seinem Entwurf wurde berücksichtigt, daß eine komplexe Beziehung gültig bleibt, wenn $-j$ durch j und umgekehrt ersetzt wird und daß das Tabellenwerk von HAWELKA vom reellen Teil des tg-Argumentes den Faktor $\pi/2$ abgespalten hat. Die Werte $\operatorname{ArcTg} W$ entnimmt man zweckmäßig einem Nomogramm oder einer Tabelle[2]. Bei Anwendung der Resonanzmethode wird nach Gleichung (5) anstelle von $\operatorname{Ar\,Tg} W$ die Funktion $\operatorname{Ar\,Tg}\left(\operatorname{tg} 2\pi\,\frac{\Delta l}{\lambda}\right)$ benötigt, die wir uns ebenfalls tabelliert haben. Die sechs vorzunehmenden Tabellenoperationen sind zwar etwas schwieriger als Tabellenoperationen mit reellen Tafeln, doch gewöhnt man sich schnell an das „zweidimensionale" Interpolieren. Der Vergleich mit dem 58 Schritte umfassenden Verfahren ohne Benutzung komplexer Tabellen ergibt eine Verringerung der Rechenarbeit von mehr als 50 %.

4. Auswerteverfahren für rein dielektrische Proben ($\mu^{+} = 1$).

Für den Fall rein dielektrischer Substanzen mit $\mu = 1$ und $\operatorname{tg}\vartheta_{\mu} = 0$ sind die vorstehend gebrachten Auswertungsmethoden unzweckmäßig, da sie die Ermittlung von insgesamt vier Meßgrößen voraussetzen. Es liegt nahe, zu versuchen, nur mit den Leerlaufgrößen W_L und l auszukommen. Dies ist mit Gleichung (19a) möglich, die umgeformt in unserem Fall

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\sqrt{\varepsilon^{+}}\right) = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{tg} L \tag{21}$$

[1] HAWELKA-EMDE, Tafeln der komplexen Kreis- und Hyperbelfunktionen, Vieweg, Braunschweig. $\pi/2\,x$ wird mit x^{L} bezeichnet.

[2] Z. B. HAYASCHI, Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen, W. de Gruyter, Berlin und Leipzig [1921].

Messung: Firmenich — Dat.: 21. 3. 45

Rechnung: Fi, Me, Sn — Dat.: 22. 3. 45

Besonderes:

Probe		Leerlauf: $L = x_L + j y_L$			Kurzschl.: $K = x_K \cdot j y_K$			$tg L = t_L \cdot j^{\tau_L}$		$tg K = t_K \cdot j^{\tau_K}$		$Z = \sqrt{tg L \cdot tg K}$		$\frac{arc\ tg\ Z}{Z} = r \cdot j^{\varrho}$		$\varepsilon^{+} = \frac{\varepsilon}{\cos \partial_\varepsilon} \cdot j^{\frac{2}{\pi} \partial_\varepsilon}$		$\mu^{+} = \frac{\mu}{\cos \partial_\mu} \cdot j^{\frac{2}{\pi} \partial_\mu}$	
	λ	l		$\frac{\Delta l}{W_L}$	k		$\frac{\Delta k}{W_K}$									Betrag	$\frac{2}{\pi}$ Phase	Betrag	$\frac{2}{\pi}$ Phase
	d	$l + d$	$x_L = \frac{\mu}{\lambda} (l+d)$	$y_L = ArTgW_L$	$k + d$	$x_K = \frac{\mu}{\lambda} (k+d)$	$y_K = ArTgW_K$	t_L	τ_L	t_K	τ_K	$t = \sqrt{t_L \cdot t_K}$	$\tau = \frac{\tau_L + \tau_K}{2}$	r	ρ	$\frac{\lambda}{2 \cdot d} r \cdot t_L$	$\frac{2}{\pi} \partial_\varepsilon = \rho + \tau_L$	$\frac{\lambda}{2 \pi d} r \cdot t_K$	$\frac{2}{\pi} \cdot \partial_\mu = \rho + \tau_K$
		1	3	5	2	4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	16	18
MP77	20,36	1,39	0,315	0,0835	0,325	0,105	0,1345	0,546	0,127	0,215	0,447	0,342	0,287	0,975	0,019	8,2	0,019	3,22	0,428
	0,21	1,60		0,0837	0,535		0,135												

lautet. Diese Gleichung läßt sich nach ε^+ nur dann auflösen, wenn man im Besitz der komplexen Funktion $z = w \operatorname{tg} w$ ist[1].

Im folgenden soll nun ein Näherungsverfahren angegeben werden, das in allen praktisch vorkommenden Fällen Resultate ausreichender Genauigkeit liefert, die komplexe Funktion $w \operatorname{tg} w$ vermeidet und einfach in der Anwendung ist.

Es sei zunächst überschlagen, wie groß für rein dielektrische Proben die Kurzschlußgrößen W_K und k werden. In Gleichung (19b) werde der tg-Ausdruck der linken Seite durch die zwei ersten Glieder seiner Potenzdarstellung und der rechte tg-Ausdruck, der um den Faktor $\sqrt{\varepsilon^+}$ kleiner als der linke ist, durch sein Argument ersetzt: Dies ist umso eher statthaft, je kleiner d gegen λ ist. Man erhält so

$$K = \frac{2\pi d}{\lambda}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 \varepsilon^+\right].$$

Auftrennung in Real- und Imaginärteil liefert

$$k = \frac{1}{3} d \left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 \varepsilon \tag{22}$$

$$\operatorname{Ar Tg} W_K = \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^3 \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon . \tag{22a}$$

Man erkennt, daß in allen praktisch vorkommenden Fällen k und W_K zu klein werden um meßbar zu sein (z. B. folgt für $\varepsilon = 80$, $\varepsilon \cdot \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = 30$ und $\lambda = 50$ cm bei einem $d = 2$ mm, $k = 0{,}03$ mm, $W_K = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$!). Hieraus folgt zweierlei: Erstens verbietet die Unmöglichkeit der Kurzschlußgrößenbestimmung die Anwendung des oben dargestellten komplexen Rechenverfahrens (20a). Zweitens folgt aus der Kleinheit von $\operatorname{tg} K$, daß $\operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K} / \sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}$ nur geringfügig von 1 abweicht, daß also die Beziehung (20a) durch

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon^+ = \operatorname{tg} L \tag{23}$$

in erster Näherung ersetzt werden darf. Welches ist der Gültigkeitsbereich der Beziehung (23)?

Durch Entwickeln des ersten tg-Ausdruckes der Gleichung (21) ergibt sich

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon^+ \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 \varepsilon^+ + \frac{2}{15}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^4 \varepsilon^{+2} + \dots\right] = \operatorname{tg} L. \tag{24a}$$

Es ist nun zweckmäßig, die Reihe der inversen Funktion $\varepsilon^+ = g(\operatorname{tg} L)$ zu bestimmen. Zu diesem Zweck setzt man diese Reihe zunächst mit unbestimmten Koeffizienten an

$$\varepsilon^+ = \frac{\lambda}{2\pi d} \operatorname{tg} L \left[1 + a_1 \cdot \operatorname{tg} L + a_2 \cdot \operatorname{tg}^2 L + \dots\right] \tag{24b}$$

und geht mit diesem Ausdruck in Gleichung (24a) ein. Es ergeben sich so nach der bekannten Methode der unbestimmten Koeffizienten Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten $a_1, a_2 \dots$ Ihre Auflösung liefert

$$a_1 = -\frac{1}{3}\frac{2\pi d}{\lambda}; \quad a_2 = \frac{4}{45}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2; \quad \dots$$

[1] Diese Funktion wurde von G. Untermann (Frankfurter Dissertation 1944) berechnet und graphisch in weitem Bereich dargestellt. Siehe hierzu die diesbezüglichen Ausführungen in der Einleitung.

Gleichung (24 b) lautet hiermit also

$$\varepsilon^{+} = \frac{\lambda}{2\pi d} \operatorname{tg} L \left[1 - \frac{1}{3} \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{tg} L + \frac{4}{45} \left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 \operatorname{tg}^2 L + \ldots\ldots\right]. \qquad (24\,c)$$

Die Reihe sei nach ihrem dritten Glied abgebrochen. Auftrennung in Real- und Imaginärkomponente führt nach einigen Zwischenschritten mit der Bezeichnung

$$Re - j\, Im = \operatorname{tg} L$$

zu den Beziehungen

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = Re \left[1 - \frac{1}{3} \frac{2\pi d}{\lambda} Re \left(1 - \frac{Im^2}{Re^2} + \frac{4}{45}\right) \left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 Re^2 \left(1 - 3 \frac{Im^2}{Re^2}\right)\right] \qquad (24)$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta \varepsilon = Im \left[1 - \frac{2}{3} \frac{2\pi d}{\lambda} Re + \frac{4}{45} \left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 Re^2 \left(3 - \frac{Im^2}{Re^2}\right)\right].$$

Die Reihen sind offenbar für nicht zu großes Im^2/Re^2 alternierend. Wird daher gefordert, daß das dritte Glied der ersten Reihe kleiner als 0,01 ist, so gilt mit mindestens 1% Genauigkeit für ε und 3% Genauigkeit für $\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon$:

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = Re \left[1 - 2{,}1 \frac{d}{\lambda} Re \left(1 - \frac{Im^2}{Re^2}\right)\right] \qquad (25\,a)$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = Im \left[1 - 4{,}2 \frac{d}{\lambda} Re\right]. \qquad (25\,b)$$

Die Gleichungen (25) beantworten die Frage nach dem Fehler der Beziehung (23): Der Relativfehler von Real- und Imaginärteil der Gleichung (23) ist gleich den Subtrahenden der Beziehungen (25). Die Forderung

$$\frac{4}{45} \left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 Re \left(1 - 3 \frac{Im^2}{Re^2}\right) < 0{,}01 \qquad (25\,c)$$

bedingt, daß für nicht zu großes Verhältnis Im/Re

$$\frac{1}{3} \frac{2\pi d}{\lambda} Re \left(1 - \frac{Im^2}{Re^2}\right) < 0{,}1$$

$$\frac{2}{3} \frac{2\pi d}{\lambda} Re < 0{,}2$$

gilt. Hieraus folgt: Die Forderung (25 c) bedeutet, daß der Realteil von Gleichung (23) auf wenigstens 10%, der Imaginärteil auf wenigstens 20% genau richtig ist.

Auf Grund des Vorgesagten begeht man keinen großen Fehler, wenn man für Abschätzungen in Gleichung (25 c) Re durch $(2\pi d/\lambda)\, \varepsilon$ und Im durch $(2\pi d/\lambda)\,(\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon)$ ersetzt. Dann geht (25 c) unter der Annahme $\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon < \sqrt{2/3}$ über in

$$\frac{4}{45} \left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^4 \cdot \varepsilon^2 \left(1 - 3 \operatorname{tg}^2 \vartheta_\varepsilon\right) < \frac{4}{45} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{\varepsilon}\right)^4 < 0{,}01\; d < \frac{\lambda}{10{,}9 \sqrt{\varepsilon}}. \qquad (23\,d)$$

Die Forderung (23 d) ist in allen praktisch auftretenden Fällen erfüllt (z. B. bedingt $\varepsilon = 100$ bei $\lambda = 50$ cm ein d von weniger als 5 mm!).

Damit ist gezeigt, daß die Gleichung (25) mit höchstens 1% bzw. 3% Fehler behaftete Ergebnisse liefert.

Die Anwendung der Formeln (25) ist einfach, da die Größen $2\pi d/\lambda$ und Re sowie Im ohnehin bei jedem Auswerteverfahren bestimmt werden müssen. Zu der durch Gleichung (23) bedingten Arbeit kommen noch 7 Rechenoperationen hinzu.

5. Auswertung bei sehr dünnen Proben ($2 \pi d \ll \lambda$)[1].

Ist die Probe so dünn, daß der durch sie gegebene komplexe Widerstand als praktisch punktförmig konzentriert angesehen werden kann, so werden tg L und tg K, wie man den Gleichungen (20) ansieht, zu so kleinen Größen, daß im Ausdruck

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}}{\sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}} = 1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K \ldots$$

das Produkt $\frac{1}{3} \operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K$ gegen 1 vernachlässigt werden darf. Man erkennt so, daß das arc tg z/z-Glied der Gleichungen (20) eine Korrektur der „Punktabschlußgleichungen"

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon^+ = \operatorname{tg} L \; ; \frac{2\pi d}{\lambda} \mu^+ = \operatorname{tg} K \tag{23}$$

darstellt, die umso beträchtlicher wird, je größer der von der Probe aufgenommene Teil der Welle infolge größerer Dicke d wird.

Wird auf die komplexen tg-Funktionen tg L und tg K das Additionstheorem der komplexen tg-Funktion

$$\operatorname{tg}(x - iy) = \frac{\operatorname{tg} x\,(1 - \operatorname{Tg}^2 y) - j \operatorname{Tg} y\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{Tg}^2 y} = Re - jIm$$

angewandt, so erhält man nach Komponententrennung aus Gleichung (23)

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = \operatorname{tg}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l + d)\right] \frac{1 - W_L^2}{1 + W_L^2 \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{\lambda}\left(l + d\right)} = Re \tag{26a}$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = W_L \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{\lambda}\left(l + d\right)}{1 + W_L^2 \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{\lambda}\left(l + d\right)} = Im. \tag{26b}$$

Die entsprechenden Gleichungen für μ erhält man, wie auch im folgenden immer, wenn l durch k und W_L durch W_K ersetzt wird. Die Gleichungen (26) sind auch aus Gleichung (7) leicht ableitbar, wenn dort Real- und Imaginärteil von $\mathfrak{R}$ getrennt und für ρ und φ die Größen W_L und l eingeführt werden.

Welches ist der Fehler der Gleichungen (23), (26a) und (26b)? Wie aus der Ableitung ersichtlich, wird der Fehler dadurch hervorgerufen, daß arc tg z/z durch 1 ersetzt wird. Da die Potenzreihendarstellung von arc tg z alternierend ist, genügt es zur Abschätzung des Fehlers, die durch das zweite Glied der Reihe bedingte Korrektur der Beziehungen (26) zu erfassen. Man erhält so

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon^+ = \left(R_L - jJ_L\right)\left[1 - \frac{1}{3}\left(R_L - jJ_L\right)\left(R_K - jJ_K\right)\right]. \tag{27}$$

Darin sind R_L und R_K die Realteile von tg L und tg K, J_L und J_K deren Imaginärteile. Trennt man die Real- und Imaginärteile beider Seiten von Gleichung (27), so folgt nach kurzer Zwischenrechnung

[1] Das Verfahren ist korrekt, wenn Betrag und Phase der Größen tg$L$ und tg$K$ um weniger als die geforderte Meßgenauigkeit durch den Faktor $1 - \frac{1}{3}$ tg$L$ tg$K$ beeinflußt werden.

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon = R_L\left[1 + \frac{1}{3}\left(2\,J_L\,J_K - R_L\,R_K + J_L^2\frac{R_K}{R_L}\right)\right] \tag{27a}$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon = J_L\left[1 - \frac{1}{3}\left(2\,R_L\,R_K - J_L\,J_K + R_L^2\frac{J_K}{J_L}\right)\right]. \tag{27b}$$

Die Gleichungen (27a) und (27b) lassen den Fehler der Beziehungen (26) erkennen: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} &= \frac{1}{3}\left(2\,J_L\,J_K - R_L\,R_K + J_L^2\frac{R_K}{R_L}\right) \\ \frac{\Delta\varkappa}{\varkappa} &= -\frac{1}{3}\left(2\,R_L\,R_K - J_L\,J_K + R_L^2\frac{J_K}{J_L}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Die Gleichungen (27) sind eine Verallgemeinerung der Gleichungen (25) für rein dielektrische Proben. Man erhält die letzteren aus (27a) und (27b), wenn man, was in der Korrektur statthaft ist, $R_K = 1$ und $J_K = 0$ setzt.

Für den praktischen Gebrauch ist es oft nützlich, zu wissen, wie die Korrekturwerte mit den Materialkonstanten zusammenhängen. Da die Korrekturwerte ohnehin für nicht zu schlechte Konvergenz der arc tg z-Reihe Gültigkeit beanspruchen, wird man sie als zuverlässig ansehen, so lange sie gegen 1 nicht zu groß werden (etwa 0,1 obere Grenze!). Man begeht dann nur einen Fehler höherer Ordnung, wenn man von den Beziehungen (26) Gebrauch macht. So folgt

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \sim \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 \varepsilon\,\mu\left[\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon\,(\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon + 2\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\mu) - 1\right] \tag{28a}$$

$$\frac{\Delta\varkappa}{\varkappa} \sim \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 \varepsilon\,\mu\left[\mathrm{tg}\,\vartheta_\mu\left(\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon}\right) - 2\right]. \tag{28b}$$

Für Proben mit vernachlässigbarem $\mathrm{tg}\,\vartheta_\mu$ und kleinerem $\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon$ ist dies identisch mit

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} < \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 \varepsilon\,\mu\;;\quad \frac{\Delta\varkappa}{\varkappa} < \frac{2}{3}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 \varepsilon\,\mu.$$

Die Fehler sind kleiner als 3% bzw. 6%, wenn $\sqrt{\varepsilon\mu} < \lambda/20\,d$ erfüllt ist. Man wird sich somit merken: Proben mit nicht zu hohem Verlust können nach den „Punktformeln" ausgewertet werden, wenn $\sqrt{\varepsilon\mu} < \lambda/20\,d$ erfüllt wird.

In diesem Zusammenhang ist folgende Überlegung von Interesse: Aus der Näherungsformel (gültig für $\mathrm{tg}\,L \cdot \mathrm{tg}\,K < 1$!)

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon^+ = \mathrm{tg}\,L\left(1 - \frac{1}{3}\mathrm{tg}\,L \cdot \mathrm{tg}\,K\right)$$

folgt

$$\frac{\lambda}{2\pi d\,\varepsilon^+} = \mathrm{ctg}\,L - \frac{1}{3}\mathrm{tg}\,K.$$

Da für den komplexen Leitwert der Probe die folgende Formel gilt

$$\mathfrak{G} = (G + j\,\omega\,\varepsilon\,C)\,d = j\,\omega\,\varepsilon\,C\,d\left(1 - j\frac{G}{\omega\varepsilon\,C}\right) = j\,\frac{2\pi d}{\lambda}\,\frac{\varepsilon^+}{Z}.$$

ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (17a) und (17b) die Beziehung

$$\frac{1}{G} = \Re_L - \frac{1}{3}\Re_K \tag{29a}$$

und analog für $\Re = (R + j\,\omega\,\mu\,L)\,d$:

$$\frac{1}{\Re} = G_K - \frac{1}{3} G_L. \tag{29b}$$

Wir kommen somit zu der Aufstellung des folgenden Satzes: Der komplexe Widerstand der Probe bei Leerlauf ist um ein Drittel des Kurzschlußeingangswiderstandes kleiner als der Leerlaufeingangswert, der Kurzschlußleitwert um ein Drittel des Leerlaufeingangswertes kleiner als der Kurzschlußeingangsleitwert. Dieser Satz ist um so exakter gültig, je geringer $\Re_K$ gegen $\Re_L$ bzw. G_L gegen G_K ist. Wird die Probe dünn, so wird $\Re_L$ groß gegen $\Re_K$ und G_K groß gegen G_L, d. h. $1/G$ wird mit $\Re_L$ und $1/\Re$ mit G_K identisch. Dies entspricht dem Inhalt der „Punktformeln".

Hat man sich an das Arbeiten mit komplexen tg-Tafeln einmal gewöhnt, so sind die Gleichungen (23) besonders einfach im Gebrauch. Man wird dann die Gleichungen (26) nur noch in den Fällen anwenden, in denen sie infolge besonderer Gegebenheiten besonders einfach zu gebrauchen sind. Hiervon wird im folgenden die Rede sein. Die Auswertung der Gleichungen (23) wird zweckmäßig mit Hilfe des Formblattes (S. 101) geschehen, wobei die Rechenoperationen 11 bis 14 wegfallen. Unter 17 und 18 erscheinen die Werte von 8 und 10, da $\rho = 0$ gilt, die Operationen 15 und 16 werden mit $r = 1$ vorgenommen.

Bei Proben, die nicht zu große Verschiebungen bedingen, ist es zweckmäßig, die Gleichungen (26) etwas umzuformen und wie folgt zu verwenden:

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda}(l+d)\left[1 - \frac{W_L^2}{1-(1-W_L^2)\sin^2 2\pi\frac{l+d}{\lambda}}\right] \tag{30a}$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon\,\operatorname{tg}\vartheta_\varepsilon = W_L\,\frac{1}{1-(1-W_L^2)\sin^2 2\pi\frac{l+d}{\lambda}}. \tag{30b}$$

Die Größen $-\dfrac{W_L^2}{1-(1-W_L^2)\ldots}$ und $(1 - W^2{}_L)\sin^2$ sind offenbar Korrekturen, um die die einfachen Beziehungen

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda}(l+d) \tag{31a}$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon\,\operatorname{tg}\vartheta_\varepsilon = 60\,\lambda\,x = W_L \tag{31b}$$

prozentual zu verbessern sind, um zu den exakten Ergebnissen zu gelangen. In sehr vielen Fällen genügt es, diese Korrekturwerte nur zu überschlagen, um Endresultate ausreichender Genauigkeit zu erhalten. Vor allem bei Serienmessungen wird man so vorgehen, daß die Korrektur für den Fall größter Werte W_L und l zunächst abgeschätzt wird. Ist sie dann kleiner als die Meßgenauigkeit, so wird man bei allen Proben nur noch mit den Beziehungen (31) rechnen.

Wird die Verschiebung so klein, daß der tg-Ausdruck von (31a) durch sein Argument ersetzt werden darf, so geht Gleichung (31a) über in

$$\varepsilon = 1 + \frac{l}{d}. \tag{31c}$$

Der DK-Wert dieser Beziehung weicht von dem der Gleichung (31a) um weniger als 3% ab, wenn die Forderung

$$l + d < \frac{\lambda}{20} \tag{32}$$

erfüllt wird. Die Gleichung (31b) ist unter dieser Voraussetzung um höchstens 10%, für $W_L < 0{,}7$ um höchstens 5% gegen Gleichung (30b) falsch.

Während die Gleichungen (30a) und (30b) für beliebige DK- und Leitwerte, also auch für große l und W_L-Werte gelten, sind (31a) und (31b) für kleine l und W_L gültig (31a) gilt für kleines W_L, (31b) für kleines l!). Den Gleichungen (30) und (31) entnimmt man: Die DK wird um so mehr ausschließlich durch die Verschiebungsgröße l und x um so mehr durch W_L allein bestimmt, je geringer die Probenstärke und damit auch l und W_L werden.

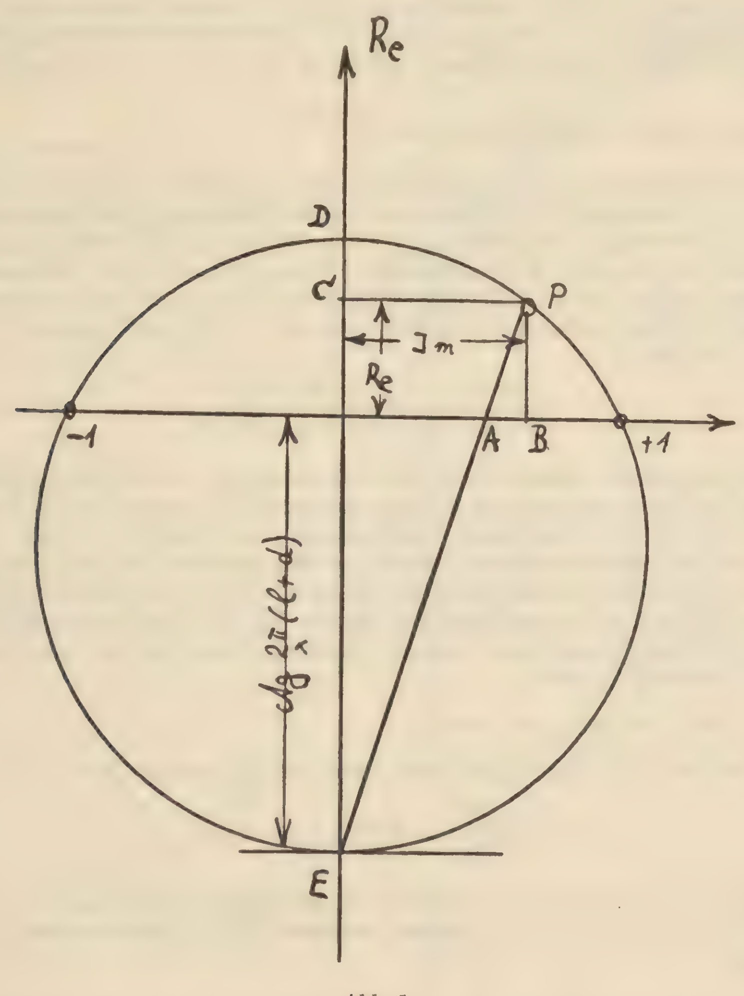


Abb. 1

Abschließend sei eine Konstruktion angegeben, auf die mein Mitarbeiter H. Metzler im Laufe gemeinsamer Diskussionen aufmerksam machte und mit deren Hilfe man den Fehler der einfachen Beziehungen (31) graphisch überblickt. Bekanntlich bilden die Orte gleicher l-Werte der komplexen Funktion

$\operatorname{tg}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l+d) - j\,\operatorname{Ar}\operatorname{Tg} W_L\right] = Re - j\,Im$ in der Re, Im-Ebene Kreise, die die Punkte $Im = \pm 1$ gemeinsam haben. Wird nun vom tiefsten Punkt E des durch ein gegebenes l bestimmten Kreises durch den Punkt A der Im-Achse, der $OA = W_L$ erfüllt, eine Gerade gezogen, so schneidet diese den Kreis in einem zweiten Punkt P, der mit PB und PC die Werte Re und Im liefert. OA und OD repräsentieren also die Ergebnisse der Gleichungen (31), OB und OC die der exakten Gleichungen (26). Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion ist einfach: Man entnimmt der Figur

$$\frac{Im}{Re} = \frac{Re + \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right)}{\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right)} = 1 + Re \cdot \operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right).$$

Diese Gleichung folgt aber tatsächlich unmittelbar aus den Gleichungen (26), wenn aus Gleichung (26a) $1 + Re \cdot \operatorname{tg} 2\pi/\lambda\ (l+d)$ errechnet und hierin an Stelle von $1 + \operatorname{tg}^2/1 + W_L^2 \operatorname{tg}^2$ nach Gleichung (26b) der Quotient Im/W_L eingeführt wird.

6. Extrem dünne leitende Proben[1].

Bei sehr dünnen Proben (z. B. Papieren) mit vorwiegend ohmscher Leitfähigkeit ergeben sich wesentliche Vereinfachungen in der Auswertung der Gleichungen (26), wenn die Verschiebung l sehr klein ist oder nahe bei $\lambda/4$ liegt. Der erste Fall liegt meist vor, wenn der Ohmsche Widerstand der Probe größer als der Wellenwiderstand der Leitung ist, der zweite Fall, wenn er kleiner ist. Um eine Überblick über die Abhängigkeit der Verschiebung l von G zu gewinnen, ist in der folgenden Abbildung der Zusammenhang[2]

$$\operatorname{tg}\frac{4\pi l}{\lambda} = \frac{2Z\omega C}{1 - (ZG)^2 - (Z\omega C)^2}$$

graphisch dargestellt. Darin ist l/λ als Funktion von $a = Z \cdot G$ gebracht, wobei $b = Z\omega C$ als Parameter gewählt ist. Man erkennt: Je kleiner $Z\omega C$ ist, um so mehr schmiegt sich der Kurvenverlauf dem Grenzfall $l = 0$ für $ZG < 1$ und $l = \lambda/4$ für $ZG < 1$ an. Bei Papieren mit stark überwiegender ohmscher Leitfähigkeit entspricht daher dem Übergang von kleinen l-Werten zu Werten in der Nähe von $\lambda/4$ nur ein geringes ZG-Intervall in der Nähe des Wertes $ZG = 1$. Aus diesem Grunde ist es lohnend, für Papiermessungen Formeln bereitzustellen, die für kleine und große l-Werte zweckmäßig sind.

1. Die Verschiebung ist klein[3].

Die Forderung (32) sei erfüllt. Dann folgt aus Gleichung (26a)

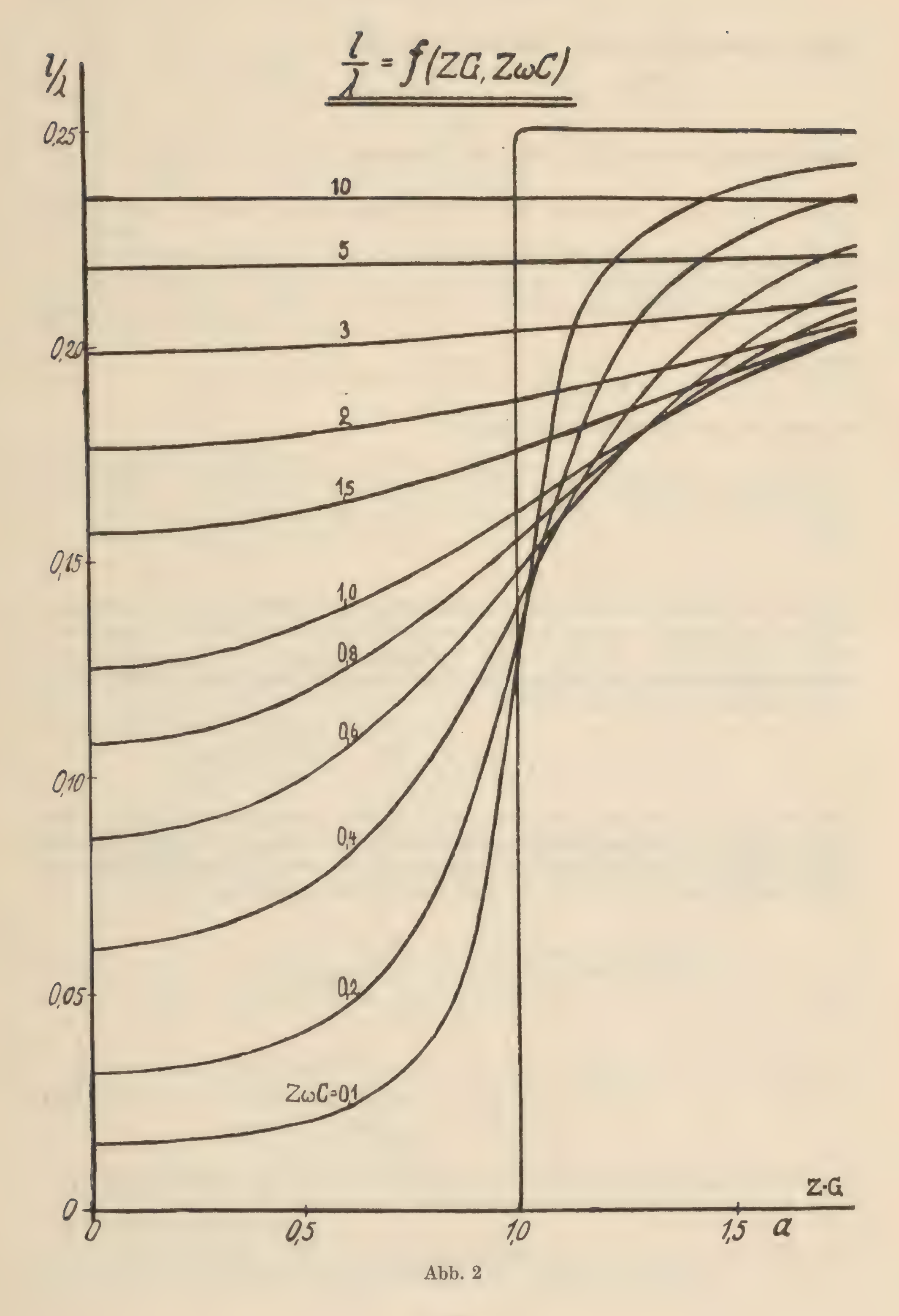
$$\varepsilon = \frac{l+d}{d}\left[1 - W_L^2\left(1 + \operatorname{tg}^2 2\pi\frac{l+d}{\lambda}\right)\right]. \tag{33a}$$

An Stelle von $\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon$ wird bei Papieren oft der Flächenwiderstand $F = 1/\varkappa\, d$ eingeführt. Nach Gleichung (13g) besteht zwischen diesen beiden Größen der Zusammenhang

[1] Die folgenden Ausführungen sind vor allem von praktischer Bedeutung, wenn $\varepsilon d < \lambda/20\,\pi$ gilt.

[2] Die Ableitung dieser Beziehung aus $\rho e^{-j\varphi} = (R-Z)/(R+Z)$ ist einfach, da die Berechnung der Phase des Quotienten $(R-Z)/(R+Z)$ keine Schwierigkeiten bereitet. Siehe hierzu z. B. DRUDE, Annalen [1897].

[3] $1 + d < \lambda/20$



l/λ = f(ZG, ZωC)
l/λ
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0
10
5
3
2
1,5
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
ZωC=0,1
Z·G
0
0,5
1,0
1,5
a

Abb. 2

$$\frac{2\,\pi\,d}{\lambda}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon = \frac{2\,\pi\,d}{\lambda}\,60\,\lambda\,\varkappa = \frac{120\,\pi}{F}\,. \tag{34}$$

Unter Benutzung dessen geht Gleichung (26b) über in

$$\frac{120\,\pi}{F} = W_L\left[1 + (1 - W_L{}^2)\,\mathrm{tg}^2\,2\,\pi\,\frac{l+d}{\lambda}\right], \tag{33b}$$

Läßt sich die Forderung (32) durch die Forderung

$$l + d \approx \varepsilon\,d < \frac{\lambda}{20\,\pi} \tag{35}$$

verschärfen, so gilt mit höchstens 1% Fehler

$$\frac{120\,\pi}{F} = W_L\,. \tag{36a}$$

Gilt überdies

$$W_L < 0{,}7, \tag{37}$$

so wird mit der gleichen Genauigkeit

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l}{d}\right)\left(1 - W_L{}^2\right) \tag{36b}$$

gültig.

2. Die Verschiebung ist groß.

Es ist bei großer Verschiebung l zweckmäßig, die Verschiebung l' einzuführen, die die Spannungsverteilung erfährt, wenn die Probe durch eine Kurzschlußscheibe ersetzt wird. Die bei diesem Verfahren bestimmte Minimumlage unterscheidet sich von der bei Leerlauf ermittelten um $\lambda/4$. Somit muß $\lambda/4$ den Wert l' zu l ergänzen. Es gilt also

$$\mathrm{tg}\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,(l + d) = \mathrm{tg}\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{4} + l' + d\right) = -\,\mathrm{ctg}\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,(l' + d).$$

Das negative Vorzeichen vor dem ctg-Ausdruck rührt offenbar daher, daß $l' + d$ und $l + d$ entgegengesetzt gerichtete Größen sind. Da bei der Messung nur der Betrag von $l' + d$ ermittelt werden muß, soll es im Folgenden fortfallen. Unter Einführung von l' folgt aus den Beziehungen (26) also:

$$\frac{2\,\pi\,d}{\lambda}\,\varepsilon = \mathrm{tg}\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\left(l' + d\right)\frac{\dfrac{1}{W_K{}^2} - 1}{1 + \dfrac{1}{W_L{}^2}\,\mathrm{tg}^2\,\dfrac{2\,\pi}{\lambda}\left(l' + d\right)} \tag{38a}$$

$$\frac{2\,\pi\,d}{\lambda}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon = \frac{1}{W_L}\,\frac{1 + \mathrm{tg}^2\,\dfrac{2\,\pi}{\lambda}\left(l' + d\right)}{1 + \dfrac{1}{W_L{}^2}\,\mathrm{tg}^2\,\dfrac{2\,\pi}{\lambda}\left(l' + d\right)}\,. \tag{38b}$$

Die Beziehungen (38) entsprechen in ihrem Aufbau den Beziehungen (26). Wird die der Gleichung (35) entsprechende Forderung

$$l' + d < \frac{\lambda}{20\,\pi} \tag{39}$$

aufgestellt, so folgt mit wenigstens 1% Genauigkeit

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l'}{d}\right) \frac{\frac{1}{W_L^2} - 1}{1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{l' + d}{W_L}\right)^2} \tag{40a}$$

$$\frac{F}{120\pi} = W_L \left[1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{l' + d}{W_L}\right)^2\right]. \tag{40b}$$

(Die weniger scharfe Forderung $l' + d < \lambda/20$ würde 3% maximalen Fehler bedingen.)

In allen Fällen, die nicht unter eine der gestellten Voraussetzungen fallen, müssen die Gleichungen (26) oder (38) herangezogen werden. Gleichungen, die sowohl für l als auch l' gelten, erhält man bei der Berechnung des Verlustfaktors. Aus den Gleichungen (26) folgt exakt:

$$\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = \frac{2\, W_L}{\left(1 - W_L\right)^2 \sin 4\pi \frac{l + d}{\lambda}}. \tag{41a}$$

Die doppelte Periodizität des sin-Gliedes bedingt den gleichen Wert für $\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon$, wenn l' an Stelle von l eingeführt wird. Bei Proben mit großem $\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon$ ist es anschaulicher, zur Charakterisierung des geringen Blindstromes den dazu reziproken Wert $1/\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon$ einzuführen. Wird zudem (35) bzw. (39) als gültig vorausgesetzt, so folgt mit mindestens 2% Genauigkeit

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l + d}{W_L} \left(1 - W_L^2\right) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l' + d}{W_L} \left(1 - W_L^2\right). \tag{41b}$$

Die Berechnung der $\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon$-Werte ist bei leitfähigen Papieren zweckmäßiger als die der *DK*-Werte, da hierbei neben der starken ohmschen Leitfähigkeit meist nur die Phasenlage des Stromvektors interessiert.

7. Nichtleitende Proben. (W_L, $W_K < 0{,}1$)

Wir beschränken uns auf die Formeln für die elektrischen Stoff-Konstanten, da die magnetischen Konstanten aus gleich gebildeten Formeln mit k an Stelle von l und W_K an Stelle von W_L hervorgehen. Ist $\operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = \operatorname{tg} \vartheta_\mu = 0$, so auch W_L und W_K. Aus Gleichung (20a) folgt also allgemein

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \varepsilon = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \left(l + d\right) \frac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda}\left(l + d\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda}\left(k + d\right)}}{\sqrt{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda}\left(l + d\right) \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda}\left(k + d\right)}}. \tag{42}$$

Für $\mu = 1$ wird k zu klein, um bestimmbar zu sein (Siehe S. 100). Dann wird die nach Gleichung (21) gebildete Formel

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{\varepsilon}\, \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{\varepsilon}\right) = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \left(l + d\right) \tag{43}$$

zweckmäßig benutzt. Sie erfordert die Kenntnis der Funktion $y = z \cdot \operatorname{tg} z$, die man sich leicht verschaffen kann.

Zu einer ausgezeichneten Näherungsformel gelangt man durch Entwickeln von Gleichung (42). Es folgt zunächst für das $\operatorname{arctg} z/z$-Glied die Reihe

$$1 - \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda}\left(k+d\right) + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right)\cdot\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{\lambda}\left(k+d\right) + \ldots$$

Man begeht einen Fehler von weniger als 5%, wenn man

$$l + d < \frac{\lambda}{10}\ ;\ k + d < \frac{\lambda}{10} \tag{44}$$

fordert und das zweite Reihenglied fortfallen läßt. Werden zudem im ersten Glied der Reihe die tg-Ausdrücke durch ihre Argumente ersetzt, so macht man einen weiteren Fehler von maximal 6% in entgegengesetztem Sinn. Es gilt somit mit großer Genauigkeit für die Reihe der Ausdruck

$$1 - \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\cdot\left(l+d\right)\cdot\left(k+d\right).$$

Wird weiter $\operatorname{tg}(2\pi/\lambda)(l+d)$ durch die beiden ersten Glieder seiner Reihe ersetzt, so begeht man einen weiteren Fehler von maximal 2%. Es gilt also an Stelle von (42) in guter Näherung die Beziehung

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l}{d}\right)\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left(l+d\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left(l+d\right)\left(k+d\right)\right].$$

Dies weicht unter der gemachten Annahme von

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l}{d}\right)\left[1 + \frac{13{,}2}{\lambda^2}\left(l+d\right)\left(l-k\right)\right] \tag{45}$$

um weniger als 2% ab und zwar wieder im entgegengesetzten Sinn. Gleichung (45) liefert also unter der Voraussetzung (44) mit wenigen Prozent Fehler behaftete Ergebnisse. Aus der im nächsten Abschnitt folgenden allgemeinen Fehlerbetrachtung ergibt sich, daß die Ungenauigkeit nicht größer als 4% werden kann (Siehe Gleichung 55a für $v = 1$, $w = \infty$, und $A_L = 0$!) und mit der vierten Potenz des Quotienten $l + d/\lambda$ sich ändert. Die letzte Gleichung ist besonders angenehm im Gebrauch, da der relative Fehler der Beziehung $\varepsilon = 1 + l/d$ in ihr erkenntlich ist. Man kann sich meist mit seiner Abschätzung begnügen, da er unter der Voraussetzung (44) nicht 13% Fehler überschreiten kann.

8. Auswertung bei dünnen Proben.

Es ist naheliegend, die im Abschnitt 5 gebrachten Verfahren, die für sehr dünne Proben gelten, zu ergänzen durch eine Reihenbetrachtung, die dem im Vorhergehenden für Blindwiderstände Gebrachten entspricht. In Gleichung (20a) sei daher der komplexe $\operatorname{tg} L$ und das komplexe $\operatorname{arc\,tg} z/z$-Glied in Reihe entwickelt, beider Produkt gebildet und dieses mit den vierten Potenzen abgebrochen. Man erhält so nach einigen Zwischenrechnungen

$$\operatorname{tg} L = L\left(1 + \frac{1}{3}L^2 + \frac{2}{15}L^4\ldots\right)$$

$$\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\operatorname{tg}L\cdot\operatorname{tg}K}}{\sqrt{\operatorname{tg}L\cdot\operatorname{tg}K}} = 1 - \frac{1}{3}LK - \frac{1}{9}LK\left(L^2+K^2\right) + \frac{1}{5}L^2K^2\ldots$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon^+ = L\left[1 + \frac{1}{3}L\left(L-K\right)\left(1 + \frac{2}{5}L^2 - \frac{4}{15}LK + \frac{1}{3}K^2\right)\right]. \tag{46}$$

Dies ist eine komplexe Gleichung vom Typ

$$\mathfrak{v} = (a_1 - j a_2)\,[1 + (b_1 + j b_2)\,(1 + c_1 + j c_2)]. \tag{47}$$

Seine Komponenten sind

$$\text{Realteil: } a_1\,[1 + b_1 + b_1 c_1 - b_2 c_2] + a_2\,[b_2\,(1 + c_1) + b_1 c_2] \tag{47a}$$

$$\text{Imaginärteil: } - a_2\,[1 + b_1 + b_1 c_1 - b_2 c_2] + a_1\,[b_2\,(1 + c_1) + b_1 c_2]. \tag{47b}$$

Der Vergleich des $\mathfrak{v}$-Ausdruckes mit dem Wert von $(2\pi\, d/\lambda)\,\varepsilon^+$ ergibt mit den Abkürzungen Ar Tg $W_L = A_L$ und Ar Tg $W_K = A_K$:

$$a_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\,(l + d) \tag{48a}$$

$$a_2 = A_L \tag{48b}$$

$$b_1 = \frac{1}{5}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (l + d)\,(l - k) - \tfrac{1}{3}\,A_L\,(A_L - A_K) \tag{48c}$$

$$-b_2 = \frac{1}{3}\,\frac{2\pi}{\lambda}\Big[(l + d)\,(A_L - A_K) + A_L\,(l - k)\Big] \tag{48d}$$

$$c_1 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left[\frac{2}{5}\left(l + d\right)^2 - \frac{4}{15}\left(l + d\right)\left(k + d\right) + \frac{1}{3}\left(k + d\right)^2\right] - \frac{2}{5}A_L^2 + \frac{4}{15}A_L A_K - \frac{1}{3}A_K^2 \tag{48e}$$

$$-c_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{4}{5}\left(l + d\right)A_L - \frac{4}{15}\Big((l + d)\,A_K + (k + d)\,A_L\Big) + \frac{2}{3}\left(k + d\right)A_K\right]. \tag{48f}$$

Wir wollen nun so verfahren, daß wir Näherungsgleichungen angeben, die man durch Abbrechen des $\mathfrak{v}$-Ausdruckes mit den b-Gliedern gewinnt und den Fehler dieser Gleichungen durch Diskussion des durch die c-Glieder bedingten Restes abschätzen. Die Komponenten der Gleichungen (47a) und (47b) sind mit dem $2\pi\, d/\lambda$-fachen von ε und $\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon$ identisch. Werden in ihnen die c-Glieder gestrichen und für die a- und b-Werte die Gleichungen (48) eingesetzt, so folgt

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l}{d}\right)\left[1 + \frac{13{,}2}{\lambda^2}\left(l + d\right)\left(l - k\right) - \frac{1}{3}A_L^2\,\frac{l - k}{l + d} - \frac{2}{3}A_L\,(A_L - A_K)\right] \tag{49a}$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = A_L\left[1 - \frac{A_L}{3}\left(A_L - A_K\right) + \frac{13{,}2}{\lambda^2}\left((l + d)^2\,\frac{A_L - A_K}{A_L} + 2(l + d)\,(l - k)\right)\right]. \tag{49b}$$

Die Beziehungen (49) sind einfach im Gebrauch, da die Glieder in den eckigen Klammern meist so klein sind, daß ihre Abschätzung ausreicht. Ist $A_L < 0{,}1$ und $A_K < 0{,}2$, so wird Gleichung (49a) mit Gleichung (45) identisch. Ist $l + d < \lambda/20\pi$ und $k + d < \lambda/10\pi$, so geht für $A_K < 2\,A_L$ die Gleichung (49b) in die Gleichung (45) entsprechende Beziehung

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_\varepsilon = A_L\left[1 - \frac{A_L}{3}\,(A_L - A_K)\right] \tag{50}$$

über.

Welches ist nun der durch Vernachlässigung der c-Glieder bedingte Fehler? Solange die Korrekturglieder in den eckigen Klammern der Gleichungen (49) kleiner als 1 sind, kann der relative DK-Fehler der Gleichung (49a) gemäß Gleichung (47a) mit

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \left(b_1 c_1 - b_2 c_2\right) + \frac{a_2}{a_1}(b_2 c_1 + b_1 c_2) \tag{51a}$$

und der relative Leitfähigkeitsfehler der Gleichung (49b) nach Gleichung (47b) mit

$$\frac{\Delta\varkappa}{\varkappa} = \left(b_1 c_1 - b_2 c_2\right) - \frac{a_1}{a_2}(b_2 c_1 + b_1 c_2) \tag{51b}$$

in guter Näherung angegeben werden. Es sei jetzt gefordert

$$l + d < \frac{\lambda}{10v} \;;\; k + d < \frac{\lambda}{10v} \tag{52a}$$

$$A_L < \frac{2\pi}{10\,w} \;;\; A_K < \frac{2\pi}{10w}, \tag{52b}$$

wobei über die Konstanten v und w noch nicht verfügt werden soll. Dann folgt auf Grund der Gleichungen (48)

$$\left|b_1\right| < 0{,}13\left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right] \;;\; \left|b_2\right| < \frac{0{,}26}{v\cdot w} \tag{53a}$$

$$\left|c_1\right| < 0{,}026\left[\frac{11}{v^2} + \frac{4}{w^2}\right] \;;\; \left|c_2\right| < \frac{0{,}58}{v\cdot w}. \tag{53b}$$

Unter Benutzung der Beziehungen (53) lassen sich obere Grenzen für die Klammerausdrücke der Beziehungen (51) angeben. Es folgt im einzelnen:

$$\left|b_1 c_1 - b_2 c_2\right| < 0{,}04\left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right]^2 + \frac{0{,}15}{v^2 w^2} \tag{54a}$$

$$\left|b_2 c_1 + b_1 c_2\right| < \frac{0{,}15}{v\,w}\left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right] \tag{54b}$$

Nach den Gleichungen (48a), (48b), (51) und (54) erhält man als Abschätzung des Fehlers der Gleichungen (49) somit:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} < 0{,}04\left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right]^2 + \frac{0{,}15}{v^2 w^2} + \frac{\lambda}{2\pi}\cdot\frac{A_L}{l+d}\cdot\frac{0{,}15}{v\cdot w}\left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right] \tag{55a}$$

$$\frac{\Delta\varkappa}{\varkappa} < 0{,}04\left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right]^2 + \frac{0{,}15}{v^2 w^2} + \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{l+d}{A_L}\,\frac{0{,}15}{v\cdot w}\left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right]. \tag{55b}$$

Man erkennt: Die Gleichungen (49) liefern für die Realkomponente bei $A_L < 2\pi/\lambda\,(l+d)$ und für die Imaginärkomponente bei $A_L > (2\pi/\lambda)\;(l+d)$ ungenauere Ergebnisse als für die Imaginär- bzw. Realkomponente. Umgekehrt gilt für

$$A_L < \frac{2\pi}{\lambda}\left(l + d\right) : \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} < 0{,}04\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right)^4 \tag{56a}$$

$$A_L > \frac{2\pi}{\lambda}\left(l + d\right) : \frac{\Delta\varkappa}{\varkappa} < 0{,}04\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right)^4. \tag{56b}$$

Die Beziehungen (49) sind daher besonders geeignet für die *DK*-Bestimmung schlecht ohmisch leitender Proben und die Leitwert-Bestimmung gut ohmisch leitender Proben.

Wenden wir uns den Fällen geringer Dämpfung zu, so ergibt sich folgendes: Für $W_L \approx A_L < 0{,}1$ und $W_K \approx A_K < 0{,}2$ stimmt Gleichung (45) mit der allgemein als gültig erkannten Beziehung (49a) praktisch überein. Der exakte Wert von

Gleichung (49a) ist etwas kleiner und zwar um höchstens 1%. Da unter den gemachten Voraussetzungen $A_L < 0{,}1$ und $A_K < 0{,}2$ $W < 2$ und auf Grund der Voraussetzung (44) $V < 1$ gilt, ergibt sich, daß der durch Vernachlässigung der höheren Glieder bedingte Fehler nach Gleichung (55a) kleiner als 7% ist, wenn $A_L < (2\pi/\lambda)\,(l + d)$ erfüllt ist. Wird A_L, $A_K < 1/20$ gefordert, so ist er kleiner als 5%, im Falle $A_L = A_K = 0$ kleiner als 4%.

9. Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird die Frage erörtert, wie man im Dezimeterwellenbereich die vier elektrischen und magnetischen Konstanten ε, μ, $\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon$ und $\mathrm{tg}\,\vartheta_\mu$ von Materialien zweckmäßig bestimmt. Dabei wird angenommen, daß die Materialprobe das Ende einer Lecherleitung ohne Änderung der Leitungsdimensionen ausfüllt bzw. umgibt und die bekannte Methode der Spannungsabtastung zwischen Sender und Probe voraussetzt. Mit dieser Methode wird das Wellenverhältnis $U(\mathrm{min}) : U\,(\mathrm{max})$ und die Lage der Spannungsminima gemessen, wobei die Probe am der Leitung abgewandtem Ende einmal kurzgeschlossen ist und im zweiten Meßgang offen bleibt. Die bisher bekannten rechnerischen Verfahren zur Bestimmung der genannten Materialkonstanten aus den Meßwerten sind recht umständlich. So benötigt das in der vorliegenden Arbeit zunächst gebrachte Verfahren, das nur geringe Verbesserungen gegenüber den von anderen Autoren mitgeteilten Methoden besitzt, 58 Rechenoperationen (Gleichungen 8c, 8d, 10b, 10c, 13a, 13b, 13e und 13f). Nur ein kleiner Teil dieser Arbeit kann durch graphische Darstellungen erleichtert werden. Bei Serienuntersuchungen macht sich der durch diese Auswertung bedingte Zeitaufwand sehr störend bemerkbar. So ergibt sich die Frage nach zweckmäßigeren Auswerteverfahren, die das Endergebnis schneller ermitteln lassen. In der vorliegenden Arbeit werden solche Verfahren angegeben.

Ist man im Besitz komplexer Tangenstafeln, so arbeitet man zweckmäßig mit dem Verfahren, das in den Gleichungen (20a) und (20b) seinen Ausdruck findet und das bei gleicher Allgemeingültigkeit eine wesentliche Verbesserung gegenüber dem erstgebrachten Verfahren aufweist. Es werden ein Formblatt (s. S. 101) und eine Tabelle der komplexen Funktion $\mathrm{arc\,tg}\, z/z$ beigegeben, mit deren Hilfe die vier Materialkonstanten in nur 18 Rechenoperationen bestimmt werden können. Der Zeitaufwand bei Anwendung dieses „komplexen" Verfahrens beträgt etwa ein Drittel desjenigen, den das erstgenannte Verfahren erfordert.

Man kann sich die Rechenarbeit weiter sehr erleichtern, wenn man spezielle Gegebenheiten der Materialproben berücksichtigt. Es ist dann möglich, gegenüber dem genannten komplexen Verfahren weitere für die praktische Arbeit bedeutende Vereinfachungen einzuführen. Es sind daher im weiteren Verlauf der Arbeit eine Reihe von Sonderverfahren entwickelt worden, die in sehr vielen Fällen besonderer Probeneigenschaften von praktisch großem Nutzen sind. Diese Methoden betreffen die folgenden Möglichkeiten:

1. Die Materialien sind nicht eisenhaltig. Es ist $\mu = 1$ und $\mathrm{tg}\,\vartheta_\mu = 0$. Ist dies der Fall, so wird die Durchführung der Kurzschlußmessung schwer durchführbar, wie den Gleichungen (22) und (22a) entnommen werden kann und auch unnötig. ε und $\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon$ sind dann nach der bekannten Beziehung (21) exakt bestimmbar, wobei man allerdings im Besitz der komplexen Funktion $z = w\,\mathrm{tg}\,w$ sein muß. Ohne diese Funktion ergeben sich in vollkommen ausreichender Näherung die gesuchten Werte schnell mit Hilfe der Beziehungen (25a) und (25b), wenn die Forderung (23d) erfüllt wird, was praktisch meist der Fall ist.

2. Die Proben sind dünn. Man verwendet zweckmäßig die reellen Beziehungen (30a) und (30b), wobei meist die darin enthaltenen Korrekturen der einfachen Beziehungen (31a) und (31b) nur überschlagen werden müssen. Wenn die Korrek-

turen in den Gleichungen (30) so groß werden, daß ihre genaue Berechnung erforderlich wird, dann rechnet man einfacher mit Hilfe der Beziehungen (23) komplex. Der Gültigkeitsbereich der Beziehungen (30) ist mit Hilfe der Beziehungen (28a) und (28b) abschätzbar, den Relativfehler liefern die Beziehungen (28).

3. Die Proben sind sehr dünn und vorwiegend ohmisch leitend. Dieser Fall ist z. B. gegeben, wenn leitfähige Papiere untersucht werden sollen. Es ergeben sich hier besonders einfache Beziehungen für Leitfähigkeit und Verlustfaktor, wenn die Verschiebung der Spannungsverteilung, die das Papier verursacht, klein ist.

4. Die Materialien verursachen keine Dämpfung, d. h. es ist $\operatorname{tg}\vartheta_\varepsilon = \operatorname{tg}\vartheta_\mu = 0$. Es werden die hierfür exakten Formeln und im Gebrauch sehr einfachen Näherungsformeln angegeben. Die Näherungsgleichungen (45) gestatten die Bestimmung von ε und μ mit ausreichender Genauigkeit, wenn die Forderung (44) erfüllt wird.

5. Sodann werden Formeln angegeben, die eine Erweiterung der Gleichungen (45) für beliebig leitfähige Proben darstellen und ihre Fehler abgeschätzt. Sie sind besonders geeignet zur Bestimmung der DK schlecht leitender Proben und zur Ermittlung der Leitfähigkeit gut leitender Materialien.

Abschließend folgt eine ausführliche Formelzusammenstellung für den praktischen Gebrauch und die Tabelle der komplexen Funktion $w = \operatorname{arc\,tg} z/z$, die auf Veranlassung des Verfassers von H. METZLER für den erläuterten Zweck speziell berechnet wurde.

FORMELZUSAMMENSTELLUNG ZUR ERMITTLUNG DER ELEKTRISCHEN UND MAGNETISCHEN MATERIALKONSTANTEN IM DEZIMETERBEREICH.

1. Verfahren für Proben beliebiger Materialwerte (ohne Verwendung komplexer Funktionen).

$$\varphi_L = \frac{4\pi}{\lambda}(l + d) \tag{1a}$$

$$\varphi_K = \frac{4\pi}{\lambda}(k + d) - \pi \tag{1b}$$

$$r^2 = \frac{1 + w^2 + (1 - w^2)\cos\varphi}{1 + w^2 - (1 - w^2)\cos\varphi} \tag{1c}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{1 - w^2}{2\,w}\sin\varphi \tag{1d}$$

$$\operatorname{Tg} 2\,\beta\,d = \frac{2\sqrt{r_K/r_L}}{1 + r_K/r_L}\cos\frac{\vartheta_K - \vartheta_L}{2} \tag{1e}$$

$$\operatorname{tg} 2\,\alpha\,d = \frac{2\sqrt{r_K/r_L}}{1 - r_K/r_L}\sin\frac{\vartheta_K - \vartheta_L}{2} \tag{1f}$$

$$\mu = \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{r_L r_K}\left[\alpha\cos\frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} + \beta\sin\frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2}\right] \tag{1g}$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{r_L \cdot r_K}}\left[\alpha\cos\frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} - \beta\sin\frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2}\right] \tag{1h}$$

$$\vartheta_\mu = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2} \tag{1i}$$

$$\vartheta_\varepsilon = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\vartheta_L + \vartheta_K}{2}\,. \tag{1k}$$

In den folgenden Abschnitten werden nur Formeln für ε und $\varepsilon \cdot \operatorname{tg}\vartheta_\varepsilon$ angegeben. Die entsprechenden Gleichungen für die magnetischen Stoffkonstanten erhält man, wenn l durch k und W_L durch W_K in den gebrachten Gleichungen ersetzt wird.

2. Verfahren für Proben beliebiger Werte (unter Verwendung komplexer Funktionen).

$$L = 2\pi\frac{l+d}{\lambda} - j\,\operatorname{Ar\,Tg} W_L \tag{2a}$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon^+ = \operatorname{tg} L\,\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}}{\sqrt{\operatorname{tg} L \cdot \operatorname{tg} K}}\,. \tag{2b}$$

3. Verfahren für $\mu^+ = 1$.

In

$$\operatorname{tg} L = Re - j\,Im \tag{3a}$$

ist $\operatorname{tg} L$ durch die Gleichung (2a) definiert. Es gilt in ausreichender Näherung

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon = Re\left[1 - 2{,}1\frac{d}{\lambda}\,Re\left(1 - \frac{Im^2}{Re^2}\right)\right] \tag{3b}$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon\,\operatorname{tg}\vartheta_\varepsilon = Im\left[1 - 4{,}2\frac{d}{\lambda}\,Re\right]. \tag{3c}$$

Bei nicht zu großem Verhältnis Im/Re sind die Gleichungen anwendbar, wenn

$$\sqrt{\varepsilon} < \frac{\lambda}{10d} \tag{3d}$$

erfüllt wird. Wird der Forderung (3d) nicht genügt, so muß nach der Gleichung

$$\sqrt{\varepsilon^+}\,\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\sqrt{\varepsilon^+}\right) = \operatorname{tg} L \tag{3e}$$

unter Zuhilfenahme der komplexen Funktion $z = w \cdot \operatorname{tg} w$ gearbeitet werden.

4. Verfahren für sehr dünne Proben.

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon = R_L = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right)\frac{1 - W_L^2}{1 + W_L^2\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right)} \tag{4a}$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon\,\operatorname{tg}\vartheta_\varepsilon = Im = W_L\,\frac{1 + \operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right)}{1 + W_L^2\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right)}\,. \tag{4b}$$

Der Fehler der Beziehungen ist abschätzbar nach

$$3\,\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = 2\,I_L\,I_K - R_L\,R_K + I_L^2\,\frac{R_K}{R_L} \tag{4c}$$

$$3\,\frac{\Delta\,(\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon)}{\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon} = 2\,R_L\,R_K - I_L\,I_K + R_L^2\,\frac{I_K}{I_L}\,. \tag{4d}$$

Bei kleinen Verschiebungswerten l gilt

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon = \mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right)\left[1 - \frac{W_L^2}{1-\left(1-W_L^2\right)\sin^2\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right)}\right] \approx \mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{\lambda}\,(l+d) \tag{4e}$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon = W_L\,\frac{1}{1-\left(1-W_L^2\right)\sin^2\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right)} \approx W_L. \tag{4f}$$

Wird $l + d < \lambda/20$, so gilt bei kleinem W_L

$$\varepsilon = 1 + \frac{l}{d}\,. \tag{4g}$$

5. Papiermessungen.

Ist $l + d < \lambda/20\pi$ und $W_L < 0{,}7$, so gilt

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon = \frac{120\,\pi}{F} = W_L\,. \tag{5a}$$

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l}{d}\right)(1 - W_L^2). \tag{5b}$$

Ist $l' + d < \lambda/20\pi$ (l' wird gemessen, wenn die Probe durch Kurzschluß ersetzt wird und ist umgekehrt wie l gerichtet), so gilt

$$\frac{F}{120\,\pi} = W_L\left[1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{l'+d}{W_L}\right)^2\right] \tag{5c}$$

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l'}{d}\right)\frac{1/W_L^2 - 1}{1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\;\frac{l'+d}{\lambda}\right)^2}\,. \tag{5d}$$

In allen anderen Fällen werden die Beziehungen (4a) und (4b) verwandt. Allgemein gilt ferner

$$\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon = \frac{2\,W_L}{\left(1-W_L^2\right)\sin\frac{4\pi}{\lambda}\left(l+d\right)} = \frac{2\,W_L}{\left(1-W_L^2\right)\sin\frac{4\pi}{\lambda}\left(l'+d\right)}\,. \tag{5e}$$

6. Nichtleitende Proben.

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\;\varepsilon = \mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right)\frac{\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right)\cdot\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{\lambda}\left(k+d\right)}}{\sqrt{\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{\lambda}\left(l+d\right)\cdot\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{\lambda}\left(k+d\right)}}\,. \tag{6a}$$

Für $\mu = 1$ gilt

$$\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{tg}\,\frac{2\,\pi\,d}{\lambda}\sqrt{\varepsilon} = \mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{\lambda}\,(l+d)\,. \tag{6b}$$

Für $l + d < \lambda/10$ und $k + d < \lambda/10$ gilt

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l}{d}\right)\left[1 + \frac{13{,}2}{\lambda^2}(l + d)(l - k)\right]. \tag{6c}$$

7. Verfahren für dünne Proben,
die nach den Formeln (4) ungenau gemessen werden:

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{l}{d}\right)\left[1 + \frac{13{,}2}{\lambda^2}\left(l + d\right)\left(l - k\right) - \frac{1}{3}A_L{}^2\frac{l - k}{l + d} - \frac{2}{3}A_L\left(A_L - A_K\right)\right] \tag{7a}$$

$$\frac{2\,\pi\,d}{\lambda}\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon =$$

$$A_L\left[1 - \frac{A_L}{3}\left(A_L - A_K\right) + \frac{13{,}2}{\lambda^2}\left\{\left(l + d\right)^2\frac{A_L - A_K}{A_L} + 2\left(l + d\right)\left(l - k\right)\right\}\right]. \tag{7b}$$

Darin ist $A_L = \mathrm{Ar\,Tg}\,W_L$ und $A_K = \mathrm{Ar\,Tg}\,W_K$. Der Fehler der Gleichungen in relativem Maße ist beschränkt durch die Beziehungen:

$$\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon} < m + \frac{\lambda}{2\pi}\frac{A_L}{l + d}n \tag{7c}$$

$$\frac{\Delta\,(\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon)}{\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\vartheta_\varepsilon} < m + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{l + d}{A_L}n, \tag{7d}$$

worin

$$m = 0{,}04\left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right]^2 + \frac{0{,}15}{v^2 w^2} \tag{7e}$$

$$n = \frac{0{,}15}{v \cdot w}\left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}\right] \tag{7f}$$

mit

$$\left.\begin{matrix} l + d \\ k + d \end{matrix}\right\} < \frac{\lambda}{10v} \qquad \left.\begin{matrix} A_L \\ A_K \end{matrix}\right\} < \frac{2\pi}{10w} \tag{7g}$$

ist.

RÜCKBLICK.

Die vorliegende Untersuchung befaßt sich mit dem Problem der Messung komplexer Widerstände, dielektrischer und magnetischer Konstanten von schwach- und starkleitenden Substanzen bei ultrahohen Frequenzen (Dezimeterwellen). Es handelt sich dabei sowohl um die Entwicklung geeigneter Meßmethoden als auch um die Ausarbeitung zweckmäßiger Auswerteverfahren zur Bestimmung der gesuchten Konstanten auf Grund der experimentell gewonnenen Meßwerte. In der Einleitung (Kapitel I) der Arbeit wurde die Wichtigkeit dieser Fragestellungen für verschiedene Zweige der naturwissenschaftlichen Forschung gezeigt. Besondere Bedeutung haben sie in der biophysikalischen Hochfrequenzforschung erlangt, wo es sich darum handelt, einerseits durch die Bestimmung der elektrischen Konstanten biologischer Gewebe die therapeutischen Anwendungsmöglichkeiten des Dezimeterwellenbereiches zu klären und abzugrenzen, andererseits Strukturanalysen des normalen bzw. pathologischen Gewebes und damit die Diagnostik krankhafter Prozesse im Organismus durch solche Messungen zu erreichen.

Die bisher vorliegenden, hauptsächlich von Hochfrequenztechnikern entwickelten Methoden haben vor allem drei Nachteile: 1. Die bisher bekannten Resonanzverfahren sind nur in speziellen Fällen anwendbar und das meistbenutzte Verfahren der Spannungsabtastung längs einer Lecherleitung erfordert die Untersuchung eines sehr störanfälligen Minimumwertes. 2. Die bei den bisher empfohlenen Anordnungen angebrachten Stützen der Leiter stören in schwer übersehbarer Weise die Messung. 3. Alle bis jetzt bekannten Verfahren, aus den mit Hilfe der an Lecherleitungen gewonnenen Meßdaten die elektrischen und magnetischen Konstanten von irgendwelchen Substanzen zu berechnen, sind sehr umständlich. In der vorgelegten Arbeit wird gezeigt, wie Meßtechnik und Auswerteverfahren so verbessert werden können, daß allen Anforderungen bezüglich Einfachheit und zugleich Genauigkeit genügt wird und die soeben geschilderten Schwierigkeiten beseitigt werden.

Das zweite Kapitel enthält eine umfassende Theorie der nichtquasistationären Resonanzmethoden. In ihr wird bewiesen, daß die Resonanzverfahren keinesfalls, wie oft behauptet wird, vorzugsweise für nur stark wellenwiderstandsungleiche Widerstände geeignet sind. Es kann vielmehr grundsätzlich mit den zweckmäßig gestalteten Resonanzmethoden, wie dies für die vom Verfasser entwickelten Anordnungen in der vorliegenden Arbeit gezeigt worden ist, alles das geleistet werden, was mit den „Abtastmethoden", bei denen die Spannungsverteilung längs der Meßleitung abgetastet wird, möglich ist. Die Resonanzverfahren verfügen zudem über wesentliche Vorteile bei stark wellenwiderstandsungleichen Widerständen. Aus der Arbeit folgt, daß die Resonanzmethoden den Abtastverfahren stark überlegen sind und in der Dezimeterwellenmeßtechnik ausschließlich zur Anwendung kommen sollten.

In dem dritten Kapitel wird eine vom Verfässer entwickelte Lecherleitung in offener Bauform beschrieben, die nach einem der in dem zweiten Kapitel beschriebenen besonders zweckmäßigen Resonanzverfahren arbeitet. Die Leitung ist für Messungen im Wellenlängenbereich von 40 bis 300 cm geeignet. Ihre Vorteile vor Leitungen anderer Ausführungsform werden ausführlich behandelt. Besondere Abschnitte sind Fragen der Probenanpassung und den bei Anwendung von Substitutionsmethoden zu berücksichtigenden Gesichtspunkten gewidmet.

Im vierten Kapitel wird schließlich die Wirkung einer am Ende der Leitung befindlichen Halterung, wie sie bei der im dritten Kapitel beschriebenen Anlage angebracht ist, theoretisch näher untersucht. Es wird gezeigt, däß die Vernachlässigung der durch eine nicht ganz einwandfrei hergestellte Halterung bedingten Störung unter Umständen zu groben Fehlbestimmungen führt und angegeben, wie die Störung einer Halterung bestimmt und eliminiert werden kann.

Das letzte Kapitel behandelt speziell die Bestimmung von Materialkonstanten beliebig leitfähiger Proben. Die bisher üblichen Verfahren erfordern im allgemeinen

einen erheblichen rechnerischen Aufwand und sind daher nicht sehr angenehm im praktischen Gebrauch. Der Verfasser hat es sich daher zur Aufgabe gemacht, diese Verfahren auf die knappste Form zu bringen. Es wurde ein Rechenverfahren ausgearbeitet, das einen wesentlichen Zeitgewinn gegenüber den ersterwähnten Methoden ergibt, ohne in seinem Gültigkeitsbereich beschränkt zu sein. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird gezeigt, daß bei speziellen Probeneigenschaften (geringe Probendicke, geringe Wirkverluste oder $\mu = 1$ usw.) nochmals wesentliche Vereinfachungen erzielt werden können und die dann zweckmäßig anzuwendenden Rechenverfahren entwickelt.

Vierstellige Tafel der komplexen Funktion $w = \frac{\operatorname{arc\,tg} z}{z}$ Tafeleingang: $z = t \cdot i^{\pm\tau}$ $(O \leqslant t \leqslant 1$ und $|\tau| \leqslant 1)$

Tafelausgang: $w = r \cdot i^{\pm\varphi}$

$r =$

τ \ t	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,00	1,0000	—33 0,9967	—97 0,9870	—155 0,9715	—202 0,9513	—240 0,9273	—266 0,9007	—282 0,8725	—291 0,8434	—292 0,8142	—288 0,7854
		1	6	13	19	26	31	35	38	40	39
0,10	1,0000	—32 0,9968	—92 0,9876	—148 0,9728	—196 0,9532	—233 0,9299	—261 0,9038	—278 0,8760	—288 0,8472	—290 0,8182	—289 0,7893
		5	17	36	57	78	95	108	117	120	122
0,20	1,0000	—27 0,9973	—80 0,9893	—129 0,9764	—175 0,9589	—212 0,9377	—244 0,9133	—265 0,8868	—279 0,8589	—287 0,8302	—287 0,8015
		7	28	58	94	129	161	185	201	210	212
0,30	1,0000	—20 0,9980	—59 0,9921	—99 0,9822	—139 0,9683	—177 0,9506	—212 0,9294	—241 0,9053	—263 0,8790	—278 0,8512	—285 0,8227
		10	36	77	127	180	230	270	299	315	320
0,40	1,0000	—10 0,9990	—33 0,9957	—58 0,9899	—89 0,9810	—124 0,9686	—162 0,9524	—201 0,9323	—234 0,9089	—262 0,8827	—280 0,8547
		10	41	89	153	226	300	367	416	448	459
0,50	1,0000	0 1,0000	—2 0,9998	—10 0,9988	—25 0,9963	—51 0,9912	—88 0,9824	—134 0,9690	—185 0,9505	—230 0,9275	—269 0,9006
		10	41	95	170	264	370	475	566	626	652
0,60	1,0000	10 1,0010	29 1,0039	44 1,0083	50 1,0133	43 1,0176	18 1,0194	—29 1,0165	—94 1,0071	—170 0,9901	—243 0,9658
		10	39	91	170	281	425	593	759	888	952
0,70	1,0000	20 1,0020	58 1,0078	96 1,0174	129 1,0303	154 1,0457	162 1,0619	139 1,0758	72 1,0830	—41 1,0789	—179 1,0610
		7	31	75	148	263	437	687	1004	1315	1497
0,80	1,0000	27 1,0027	82 1,0109	140 1,0249	202 1,0451	269 1,0720	336 1,1056	389 1,1445	389 1,1834	270 1,2104	3 1,2107
		5	21	51	103	194	355	650	1194	2073	2834
0,90	1,0000	32 1,0032	98 1,0130	170 1,0300	254 1,0554	360 1,0914	497 1,1411	684 1,2095	933 1,3028	1149 1,4177	764 1,4941
		2	7	17	37	72	141	295	704	2181	
1,00	1,0000	34 1,0034	103 1,0137	180 1,0317	274 1,0591	395 1,0986	566 1,1552	838 1,2390	1342 1,3732	2626 1,6358	

$-\varrho =$

Zu Seite 100.

τ \ t	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
		7	25	55	93	136	182	230	276	321	363
0,10	0,0000	7 0,0007	18 0,0025	30 0,0055	38 0,0093	43 0,0136	46 0,0182	48 0,0230	46 0,0276	45 0,0321	42 0,0363
		5	24	51	86	129	175	222	270	316	360
0,20	0,0000	12 0,0012	37 0,0049	57 0,0106	73 0,0179	86 0,0265	92 0,0357	95 0,0452	94 0,0546	91 0,0637	86 0,0723
		5	18	42	74	107	158	207	257	306	353
0,30	0,0000	17 0,0017	50 0,0067	81 0,0148	105 0,0253	119 0,0372	143 0,0515	144 0,0659	144 0,0803	140 0,0943	133 0,1076
		3	13	29	55	95	132	181	234	289	343
0,40	0,0000	20 0,0020	60 0,0080	97 0,0177	131 0,0308	159 0,0467	180 0,0647	193 0,0840	197 0,1037	195 0,1232	187 0,1419
		1	5	14	29	55	92	141	199	262	326
0,50	0,0000	21 0,0021	64 0,0085	106 0,0191	146 0,0337	185 0,0522	217 0,0739	242 0,0981	255 0,1236	258 0,1494	251 0,1745
		—1	—3	—5	—2	10	36	80	143	219	301
0,60	0,0000	20 0,0020	62 0,0082	104 0,0186	149 0,0335	197 0,0532	243 0,0775	286 0,1061	318 0,1379	334 0,1713	333 0,2046
		—3	—12	—24	—37	—47	—41	—12	50	145	260
0,70	0,0000	17 0,0017	53 0,0070	92 0,0162	136 0,0298	187 0,0485	249 0,0734	315 0,1049	380 0,1429	429 0,1858	448 0,2306
		—4	—19	—42	—74	—109	—150	—155	—116	2	188
0,80	0,0000	13 0,0013	38 0,0051	69 0,0120	104 0,0224	152 0,0376	208 0,0584	310 0,0894	419 0,1313	547 0,1860	634 0,2494
		—6	—24	—56	—103	—169	—248	—354	—430	—358	30
0,90	0,0000	7 0,0007	20 0,0027	37 0,0064	57 0,0121	86 0,0207	129 0,0336	204 0,0540	343 0,0883	619 0,1502	1022 0,2524
		—7	—27	—64	—121	—207	—336	—540	—883	—1502	—2524
1,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

